O ustawianiu

Joanna JASZUŃSKA

Zasada szufladkowa Dirichleta głosi, iż jeśli rozmieszczamy pewną liczbę obiektów w mniejszej liczbie szufladek, to któreś dwa z nich trafią do tej samej szufladki. Podobnie, jeśli liczba obiektów jest większa niż dwukrotność liczby szufladek, któreś trzy trafią razem do szufladki itd.

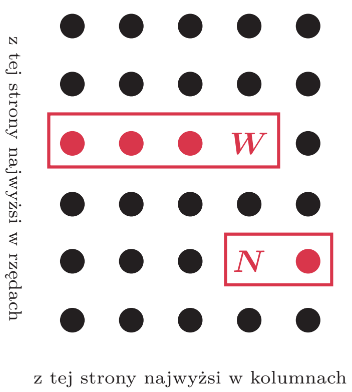
Więcej o zasadzie szufladkowej znaleźć można m.in. w *deltoidach* 2 i 3/2009.

1. Podczas defilady żołnierze mają być ustawieni w prostokąt, przy czym w każdej kolumnie i w każdym rzędzie mają stać od najwyższego do najniższego (żadni dwaj z nich nie są równego wzrostu). Dowódca ustawia ich w prostokącie jakkolwiek, po czym porządkuje według wzrostu w każdej kolumnie osobno, następnie zaś w każdym rzędzie (psując być może porządek w kolumnach), potem, jeśli trzeba, znów w kolumnach, znowu w rzędach etc. Czy ten sposób działania ma sens, tzn. czy niezależnie od początkowego ustawienia żołnierzy ta procedura zawsze po skończenie wielu takich przestawieniach da żądany efekt? A jeśli tak, to po ilu?

2. W szeregu stoi, w przypadkowej kolejności, 50 żołnierzy. Żadnych dwóch nie jest tego samego wzrostu. Wykaż, że można wybrać ośmiu z nich tak, aby, gdy wystąpią oni krok naprzód, byli ustawieni według wzrostu (rosnąco lub malejąco).

3. Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej $n > 0$ istnieje taka liczba całkowita $k > 0$, że liczbę kn można zapisać w systemie dziesiętnym używając wyłącznie cyfr 0 i 1.

4. Na okręgu umieszczono 101 dodatnich liczb całkowitych o sumie równej 300. Wykaż, że istnieje taki łuk okręgu, na którym suma liczb równa jest 200.



Rys. 1. Kolorowe ramki oznaczają żołnierzy wysokich i niskich.

Rozwiązania

R1. Tak; co więcej, wystarczy ustawić żołnierzy raz w kolumnach i raz w rzędach. Przypuśćmy, że potem w pewnej kolumnie wyższy żołnierz W stoi za niższym N, wbrew żądaniu, że mają stać według wzrostu (rys. 1). Rozważmy żołnierzy stojących w rzędzie z W i przed nim (są oni wyżsi od niego, ich wraz z W nazwiemy *wysokimi*) oraz żołnierzy stojących w rzędzie z N i za nim (są niżsi od N, ich wraz z N nazwiemy *niskimi*). Zauważmy, że każdy żołnierz wysoki jest wyższy od każdego z żołnierzy niskich (bo jest wyższy od W, a W – od N). Wysokich i niskich żołnierzy jest łącznie o 1 więcej niż kolumn, więc zanim uporządkowano rzędy, pewnych dwóch z nich stało w tej samej kolumnie. Wysocy stali w różnych kolumnach, niscy też w różnych, stąd w jednej kolumnie musiał stać jakiś żołnierz wysoki za niskim – sprzeczność, bo kolumny były już wtedy uporządkowane. $\square$

R2. Każdego żołnierza utożsamiamy z jego wzrostem, a następnie dajemy mu numer – długość najdłuższego rosnącego podciągu w danym szeregu, którego jest on ostatnim elementem. Jeśli któryś żołnierz ma numer 8, mamy szukany podciąg rosnący.

W przeciwnym przypadku każdy z 50 żołnierzy ma numer najwyżej 7. Gdyby każdy z numerów od 1 do 7 występował najwyżej 7-krotnie, łącznie mielibyśmy najwyżej 49 żołnierzy. Stąd któraś liczba powtarza się co najmniej 8 razy. Żołnierze o tych właśnie numerach tworzą szukany podciąg malejący, gdyż każdy kolejny z nich jest niższy od poprzednika o tym samym numerze (gdyby bowiem był wyższy, byłby następnym elementem rosnącego podciągu i miałby numer o jeden większy). $\square$

R3. Rozważmy liczby $1, 11, 111, \ldots$ Wśród pierwszych $n+1$ z nich pewne dwie dają tę samą resztę z dzielenia przez n. Ich różnica jest liczbą postaci $11\ldots100\ldots0$ podzielną przez n, co kończy dowód. $\square$

R4. Oznaczmy liczby wokół okręgu kolejno przez $a_1, a_2, \ldots, a_{101}$ i rozważmy sumy $a_1 + a_2 + \ldots + a_i$ dla $i = 1, 2, \ldots, 100$. Są to dodatnie liczby całkowite mniejsze od 300. Jeśli któraś z tych sum jest równa 200, zadanie jest rozwiązane, podobnie dla sumy 100 (wtedy wszystkie pozostałe a_l wyznaczają szukany łuk).

Jeśli żadna z sum nie jest równa 200 ani 100, to każda z nich przy dzieleniu przez 100 daje jedną z 99 niezerowych reszt. Wówczas pewne dwie sumy $a_1 + \ldots + a_j$ oraz $a_1 + \ldots + a_k$ dla $j < k$ dają taką samą resztę, więc ich różnica $a_{j+1} + \ldots + a_k$ dzieli się przez 100, czyli jest równa 200 lub 100. Podobnie jak powyżej wyznacza ona wobec tego poszukiwany łuk lub jego dopełnienie. $\square$

Zadania domowe

5. Wykaż, że wśród dowolnych 1111 parami różnych podzbiorów zbioru 11-elementowego zawsze znajdą się dwa rozłączne.

6. Udowodnij, że w dowolnym ciągu 2018 liczb całkowitych zawsze można wskazać pewną liczbę kolejnych wyrazów, których suma jest podzielna przez 2018.