Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

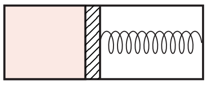
Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przesyłać również pocztą elektroniczną pod adresem `delta@mimuw.edu.pl` (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`

Rozwiązania zadań z numeru 4/2018

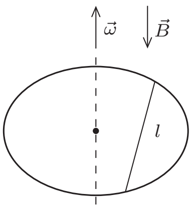
Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

Przypominamy treść zadań:

656. Naczynie odizolowane cieplnie od otoczenia rozdzielone jest na dwie części tłokiem, który może przemieszczać się bez tarcia (rys. 1). Tłok połączony jest z prawą ścianką naczynia za pomocą sprężyny. Gdy tłok styka się z lewą ścianką naczynia, sprężyna jest nieodkształcona. W lewej części naczynia znajduje się n moli jednoatomowego gazu doskonałego, w prawej części jest próżnia. Ile ciepła musi pobrać gaz (np. od umieszczonej w naczyniu spirali grzewczej), aby jego temperatura wzrosła o ΔT? Pojemność cieplną naczynia, tłoka i sprężyny zaniedbujemy.


Rys. 1

657. Na nieprzewodzącym dysku o promieniu R umocowany jest wzdłuż cięciwy drut o długości l (rys. 2). Dysk obraca się ze stałą prędkością kątową ω. Wektor indukcji jednorodnego pola magnetycznego $\vec{B}$ skierowany jest prostopadle do dysku. Znaleźć siłę elektromotoryczną indukcji między środkiem a końcem drutu.



Rys. 2

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 650 ($WT = 3{,}74$), 651 ($WT = 3{,}49$) 652 ($WT = 2{,}8$), 653 ($WT = 2{,}86$) z numerów 1 i 2/2018

Tomasz Wietecha	Tarnów	42,97
Tomasz Rudny	Gliwice	39,04
Marian Łupieżowiec	Gliwice	38,86
Jacek Konieczny	Poznań	29,80
Ryszard Woźniak	Kraków	28,77
Krzysztof Magiera	Łosiów	28,70
Karol Łukanowski	Niemcz	23,85
Aleksander Surma	Myszków	18,96
Michał Koźlik	Poznań	17,39

656. Ciepło Q, pobrane przez gaz, powoduje przyrost ΔU jego energii wewnętrznej oraz zwiększenie energii potencjalnej sprężyny:

$$Q = \Delta U + k\frac{x_2^2 - x_1^2}{2},$$

gdzie k jest współczynnikiem sprężystości, a x_2 i x_1 są odkształceniami sprężyny w stanach końcowym i początkowym. Dla gazu jednoatomowego

$$\Delta U = \frac{3}{2} nR\Delta T.$$

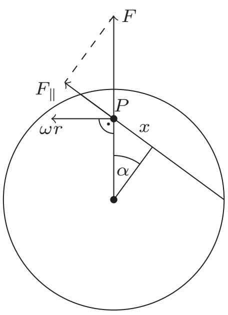
Z warunków równowagi w stanach początkowym i końcowym $p_i S = kx_i$ oraz z równań Clapeyrona $p_i x_i S = nRT_i$, gdzie $i = 1, 2$, a p_i jest ciśnieniem gazu, T_i jego temperaturą, S powierzchnią tłoka, otrzymujemy związki $kx_i^2 = nRT_i$. Szukane ciepło wynosi

$$Q = 2nR\Delta T.$$

657. Zadanie możemy rozwiązać, korzystając z praw magnetostatyki lub z prawa indukcji Faradaya.

a) Rozważmy punkt P w odległości x od środka drutu (rys. 3). Na swobodny elektron w tym punkcie działa siła Lorentza F, której składowa, równoległa do drutu, dana jest wzorem: $F_{\parallel} = eB\omega r \sin\alpha = eB\omega x$. Średnia wartość tej składowej na odcinku o długości $\frac{l}{2}$ jest równa $F_{śr} = eB\omega\frac{l}{4}$. Szukane napięcie wynosi:

$$\mathcal{E} = \frac{F_{śr}\, l}{2e} = \frac{B\omega l^2}{8}.$$

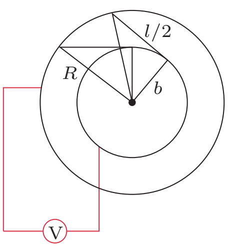


Rys. 3

Potencjał końca drutu jest wyższy niż potencjał jego środka.

b) Rozważmy odcinek drutu o długości $\frac{l}{2}$ (rys. 4), obracający się z okresem $T = \frac{2\pi}{\omega}$ między dwoma współśrodkowymi przewodzącymi okręgami o promieniach R i b, gdzie $b^2 = R^2 - \frac{l^2}{4}$. Szybkość zmian strumienia pola magnetycznego w obwodzie przedstawionym na rysunku 4 ma wartość

$$\mathcal{E} = \left|\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right| = \frac{\pi\left(R^2 - b^2\right)B}{T} = \frac{B\omega l^2}{8}.$$



Rys. 4

Rozwiązania zadań z numeru 4/2018

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Przypominamy treść zadań:

759. Ciąg nieskończony $x_0, x_1, x_2, \ldots$ jest określony wzorem rekurencyjnym $x_{n+1} = 2^{2-x_n}$ dla $n = 0, 1, 2, \ldots$; wyraz początkowy x_0 jest dowolną liczbą z przedziału $(3/2, 2)$. Wyznaczyć wszystkie liczby, będące granicami zbieżnych podciągów ciągu (x_n).

760. Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele dodatnich liczb rzeczywistych x, dla których każda z liczb $x^{1/2}+x^{-1/2}$ oraz $x^{1/3}+x^{-1/3}$ jest całkowita.

759. Ciąg (x_n) powstaje przez iterowanie funkcji $f(x) = 2^{2-x}$, którą będziemy badać na przedziale $[1, 2]$. Ponieważ f maleje od wartości $f(1) = 2$ do wartości $f(2) = 1$, zatem odwzorowuje przedział $[1, 2]$ na siebie i ma w tym przedziale dokładnie jeden punkt stały ξ (tj. taki, że $f(\xi) = \xi$). Obrazem przedziału $(1, \xi)$ jest przedział $(\xi, 2)$, i na odwrót. Stąd wniosek, że wyrazy ciągu (x_n) o numerach parzystych należą do jednego z tych przedziałów, a te o nieparzystych – do drugiego.

Równość $f(\xi) = \xi$ przepisujemy jako $\xi \cdot 2^{\xi} = 4$. Funkcja $\psi(t) = t \cdot 2^t$ jest rosnąca; przy tym $\psi(1/\ln 2) = \mathrm{e}/\ln 2 < 4$, $\psi(\xi) = 4$, $\psi(3/2) = 3\sqrt{2} > 4$, wobec czego

$$(1) \qquad \frac{1}{\ln 2} < \xi < \frac{3}{2}.$$

Ponieważ (z założenia) $x_0 > 3/2$, zatem $x_0, x_2, x_4, \ldots \in (\xi, 2)$, zaś $x_1, x_3, x_5, \ldots \in (1, \xi)$.

Użyjemy rachunku pochodnych. Oznaczmy (dla krótkości): $c = \ln 2$ i zauważmy, że $f' = -cf$. Niech $g = f \circ f$. Wówczas

$$g' = (f' \circ f) \cdot f' = -c \cdot (f \circ f) \cdot (-cf) = c^2 \cdot f \cdot g$$

i dalej:

$$(2) \quad g'' = c^2 \cdot (f' \cdot g + f \cdot g') = \\ = c^2 \cdot \big((-cf) \cdot g + f \cdot c^2 \cdot f \cdot g\big) = c^3 \cdot f \cdot g \cdot (-1 + cf).$$

Dla $x \in [1, \xi]$ mamy nierówność $f(x) \geqslant \xi > 1/c$ (por. (1)), więc wyrażenie w nawiasie po prawej stronie (2) ma w tych punktach wartość dodatnią. To znaczy, że funkcja g jest ściśle wypukła w przedziale $[1, \xi]$; a ponieważ $g(1) = 1$, $g(\xi) = \xi$, zatem

$$(3) \qquad g(x) < x \quad \text{dla } \ x \in (1, \xi).$$

Ciąg $x_1, x_3, x_5, \ldots$ leży w przedziale $(1, \xi)$ i jest generowany rekurencyjnie wzorem $x_{n+2} = g(x_n)$. Nierówność (3) pokazuje, że jest to ciąg malejący, i w konsekwencji zbieżny. Jego granica musi być punktem stałym funkcji g; jednak nie ma takiego punktu w przedziale otwartym $(1, \xi)$ (nierówność (3)). W takim razie granicą tego ciągu musi być liczba 1.

Funkcja ciągła f przeprowadza ten ciąg na ciąg rosnący $x_2, x_4, x_6, \ldots$, którego granicą jest wobec tego liczba $f(1) = 2$. To dowodzi, że niezależnie od wyboru wyrazu początkowego $x_0 \in (\xi, 2)$, ciąg (x_n) ma podciągi zbieżne do dwóch różnych granic: 1 oraz 2 (i do żadnej innej, bo dowolny podciąg ma nieskończenie wiele wspólnych wyrazów z jednym ze znalezionych podciągów, zbieżnych do 1 lub 2).

---

760. Przy oznaczeniach

$$(4) \qquad a = x^{1/2} + x^{-1/2}, \qquad b = x^{1/3} + x^{-1/3}$$

mamy związki: $a^2 = x + x^{-1} + 2$, $b^3 = x + x^{-1} + 3b$, z których wynika tożsamość

$$(5) \qquad a^2 = (b+2)(b-1)^2.$$

Gdy liczby a, b są naturalne, czynnik $b+2$ musi być kwadratem liczby naturalnej; więc $b = c^2 - 2$ $(c \in \mathbb{N})$. Zgodnie z (4), jest to suma liczb $x^{1/3}$, $x^{-1/3}$, których iloczyn wynosi 1. Zatem $x^{1/3}$, $x^{-1/3}$ to pierwiastki trójmianu kwadratowego

$$(6) \qquad t^2 - (c^2-2)t + 1 \quad (\text{zmiennej } \ t \in \mathbb{R});$$

istnieją (w $\mathbb{R}$) gdy $c \geqslant 2$; i są wówczas dodatnie. Wyznaczamy je zwykłą metodą, podnosimy do trzeciej potęgi, i dostajemy wniosek:

$$(7) \qquad x \text{ oraz } x^{-1} \ \text{ to liczby } \ \frac{1}{8}\Big(c^2 - 2 \pm \sqrt{c^4 - 4c^2}\Big)^3.$$

Rozumowanie można odwrócić. Dla dowolnej liczby naturalnej $c \geqslant 2$ określamy wzorami (7) parę liczb rzeczywistych, wzajemnie odwrotnych: x oraz x^{-1} (jedna ze znakiem plus w nawiasie, druga ze znakiem minus). Wówczas $x^{1/3}$, $x^{-1/3}$ są pierwiastkami trójmianu (6); ich suma wynosi $c^2 - 2$. Liczby a, b, zdefiniowane wzorami (4), spełniają równość (5); a ponieważ $b = x^{1/3} + x^{-1/3} = c^2 - 2$, zatem prawa strona wzoru (5) jest kwadratem liczby całkowitej, więc liczba a jest całkowita (liczba b oczywiście też).

Wzór (7), z parametrem $c = 2, 3, 4, \ldots$, przedstawia ogólną postać liczb $x \in \mathbb{R}$ o rozważanej w zadaniu własności.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 753 ($WT = 3{,}24$) i 754 ($WT = 1{,}22$) z numeru 1/2018

Franciszek S. Sikorski	Warszawa	39,86
Tomasz Choczewski	Szczecin	37,31
Tomasz Wietecha	Tarnów	34,72
Michał Miodek	Warszawa	32,78
Michał Koźlik	Gliwice	32,23
Krzysztof Kamiński	Pabianice	31,60