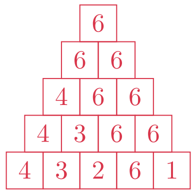
Informatyczny kącik olimpijski (118): *Piramida liczbowa i Żabka*

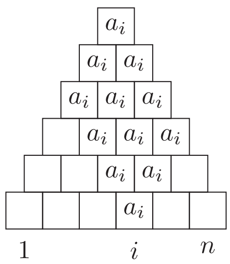
Tym razem omówimy dwa zadania z zawodów drużynowych X Olimpiady Informatycznej Gimnazjalistów.

Piramida liczbowa: *Julia postanowiła zbudować piramidę liczbową. Budowę rozpoczęła od wypisania swojego ulubionego n-elementowego ciągu a_n, który stanowił podstawę konstrukcji. Następnie, dla każdej pary sąsiednich liczb napisała nad nią większą z nich. Zauważmy, że każde kolejne piętro jest o jedną liczbę krótsze od poprzedniego. Naszym zadaniem jest obliczyć sumę elementów tej piramidy. Po prawej znajduje się przykład piramidy, której podstawę stanowi ciąg $(4, 3, 2, 6, 1)$.*



Rozwiązanie $O(n^2)$
Pierwszym pomysłem, który nasuwa się na myśl, jest wygenerowanie piramidy, która składa się z $\frac{n(n+1)}{2}$ liczb, a następnie zsumowanie tych wartości. Takie rozwiązanie działa w czasie $O(n^2)$.

Rozwiązanie $O(n \cdot \log(n))$
Zauważmy, że zbiór wartości, które występują w całej piramidzie, jest równy zbiorowi wartości, które występują w podstawie tej piramidy. Wynika to bezpośrednio z konstrukcji piramidy. W związku z tym dla każdego elementu w podstawie piramidy obliczymy, ile razy występuje on w piramidzie. Wybierzmy maksymalny element w podstawie (jeśli jest więcej niż jeden taki element, wtedy wybieramy dowolny z nich), oznaczmy go przez a_i.



Na rysunku zaznaczono elementy piramidy o wartości a_i. Pozostałe elementy tworzą dwie mniejsze piramidy. Jedna o podstawie $(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1})$, druga zaś o podstawie $(a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots, a_n)$. Wartość a_i występuje:

$$k = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{i(i-1)}{2} - \frac{(n-i)(n-i+1)}{2}$$

razy w piramidzie (jest to rozmiar całej piramidy pomniejszony o rozmiar lewej oraz prawej piramidy). Suma wszystkich elementów w piramidzie to $k \cdot a_i + L + P$, gdzie L jest sumą elementów lewej piramidy $(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1})$, zaś P jest sumą elementów prawej piramidy $(a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots, a_n)$. Aby obliczyć L i P, wystarczy opisaną procedurę wywołać rekurencyjnie.

Pozostało nam jeszcze zastanowić się, jak znajdować numer maksymalnego elementu w przedziale. Oczywiście, możemy naiwnie przejrzeć cały przedział i wybrać maksimum. Niestety, wówczas otrzymamy rozwiązanie, które działa w czasie $O(n^2)$. W celu przyspieszenia znajdowania maksimum w przedziale możemy wykorzystać drzewo przedziałowe, które w każdym węźle przechowuje dwie wartości: wartość największego elementu oraz numer tego elementu. Wówczas otrzymujemy rozwiązanie, które działa w czasie $O(n \cdot \log(n))$.

Żabka: *Żabka o imieniu Bajtuś znajduje się na kamieniu numer a. Natomiast jej upragniona mucha znajduje się na kamieniu numer b. Żabka w jednym skoku z kamienia numer x może przemieścić się na kamień o numerze $2x$ lub $2x+1$. Czy istnieje taka sekwencja ruchów, która pozwoli Bajtusiowi dotrzeć do muchy?*

Na początku rozważmy trywialny przypadek. Jeśli $a = b$, wtedy, oczywiście, Bajtuś dotarł już do muchy. Załóżmy zatem, że $a < b$. W pierwszym skoku Bajtuś może skoczyć na kamienie numer $2a$ oraz $2a+1$, innymi słowy na kamienie o numerach całkowitych z przedziału $[2a; 2a+1]$. W drugim skoku Bajtuś może skoczyć na kamienie numer $4a, 4a+1$ z kamienia numer $2a$ oraz na kamienie numer $4a+2, 4a+3$ z kamienia numer $2a+1$. Zatem po wykonaniu dwóch skoków Bajtuś może znaleźć się na kamieniach o numerach całkowitych z przedziału $[4a; 4a+3]$.

Obserwacja: Jeśli w i skokach Bajtuś może osiągnąć kamienie numer $[c; d]$, to po $i+1$ skokach może osiągnąć kamienie numer $[2c; 2d+1]$.

Dowód: Rozważmy dwa przypadki:

- $i+1$-wszy skok jest typu $(x \to 2x)$. Wówczas Bajtuś może osiągnąć kamienie numer $2c, 2c+2, \ldots, 2d$.
- $i+1$-wszy skok jest typu $(x \to 2x+1)$. Wówczas Bajtuś może osiągnąć kamienie numer $2c+1$, $2c+3, \ldots, 2d+1$.

Zatem każdy z kamieni numer $[2c; 2d+1]$ jest osiągalny przez Bajtusia po $i+1$ skokach. □

Na podstawie powyższej obserwacji generujemy przedziały numerów kamieni, które są osiągalne przez Bajtusia w kolejnych skokach:

$$[8a; 8a+7],\ [16a; 16a+15],\ [32a; 32a+31], \ldots.$$

Następnie sprawdzamy, czy istnieje przedział, którego początek jest nie większy niż b oraz b do niego należy.

Zauważmy, że numery początków kolejnych przedziałów rosną wykładniczo. Zatem rozwiązanie działa w czasie $O(\log(b/a))$.

Bartosz ŁUKASIEWICZ