



Geometria Bolyaia–Łobaczewskiego – co to jest i jak ją poznawać

Marek KORDOS

Najdłużej badanym problemem matematycznym była kwadratura koła, ale zaraz za nią uplasowała się kwestia piątego postulatatu Euklidesa. Chodziło o to, czy zdanie

jeśli dwie proste przecięte trzecią tworzą kąty wewnętrzne jednostronne o sumie mniejszej od dwóch kątów prostych, to proste te po przedłużeniu przetną się i to właśnie z tej strony

spełnia wymagane dla postulatów warunki, czyli czy wyraża rzeczy jasne i oczywiste i czy jest dostatecznie zwięzłe, by być uznane za pierwotną prawdę. Debatę zapoczątkował w V wieku Proklos, odpowiadając dwukrotnie *nie* i proponując, by wykazać, że usunięcie tego postulatatu gmachu geometrii nie naruszy.

O perypetiach piątego postulatatu pisałem w Δ_{12}^{05} i Δ_{12}^{06} .



Z biegiem stuleci angażowali się w te rozważania również przedstawiciele innych gałęzi nauki, aż do orzeczenia, że debata jest nonsensowna, bo z geometrią niejako się rodzimy (Kant, *Krytyka czystego rozumu*). I wtedy (początek XIX wieku) dwóch młodych ludzi, Węgier Janos Bolyai i Rosjanin Nikołaj Łobaczewski, uparło się, by świat przyjął, że usunięcie piątego postulatatu nie tyle narusza gmach geometrii, co go dość gruntownie przebudowuje. Spotkała ich za to surowa kara, ale odnieśli zwycięstwo, bo od tej pory wszyscy matematycy uznali istnienie alternatywnych geometrii, choć było to dla nich (i w ogóle dla całego świata nauki) równie wstrząsające, jak dla nas byłby kontakt z inną cywilizacją.

Powstał też problem, jak taka alternatywna geometria wygląda, bo umiano pokazać jej poszczególne fenomeny, ale w całości jej „zobaczyć” nie umiano. Zanim (za sprawą Kleina) takie całościowe spojrzenie zostało skonstruowane, okazało się, że alternatywnych geometrii jest wiele. Wystarczyło bowiem, by (poniekąd przymusowo) sprawę zreferował na swoim wykładzie habilitacyjnym działający w analizie matematycznej Bernard Riemann. Wskazał on, jak można opisać nieskończoną mnogość struktur matematycznych, które od naszej geometrii będą różne, będąc jednak geometriami. Skorzystamy dalej z jego pomysłu.

Po co matematyce modele?

Jeśli w jakiejś teorii A, o której jesteśmy przekonani, że jest niesprzeczna, zbudujemy model teorii B (czyli strukturę, mającą taką budowę jak teoria B), to z równym przekonaniem możemy stwierdzić, że teoria B też jest niesprzeczna. Dlatego tworząc nowe teorie, konstruuje się ich modele w klasycznej geometrii lub arytmetyce.

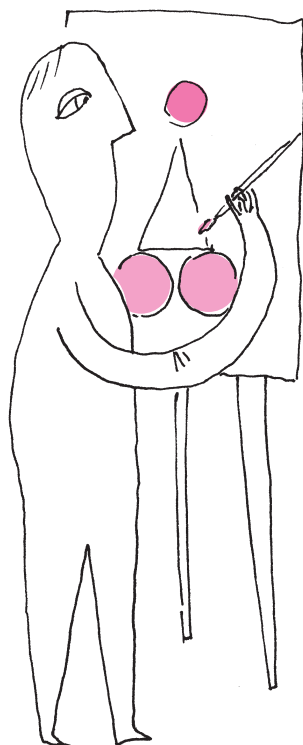
Ale jest i inny powód. Posiadanie różnych modeli interesującej nas teorii pozwala „trochę oszczędzić” na dowodzeniu. Jeśli bowiem dostrzegamy jakąś prawidłowość w modelu, to (jeśli nie ma tam specyficznych własności materii, z której model został zbudowany) możemy zaobserwowaną prawidłowość uznać za własność modelowanej teorii.

Tak w większości przypadków będziemy postępować tutaj, właśnie przez oglądanie takich modeli, w których te czy inne własności będą wręcz rzucały się w oczy. Rodzinę modeli geometrii Bolyaia–Łobaczewskiego, którymi będziemy się posługiwać, skonstruujemy, wychodząc od modelu zbudowanego przez Henri Poincarégo w myśl wskazań Riemanna.

Koncepcja Riemanna jest następująca. Określamy obiekt, który będzie w naszym modelu pełnił funkcję zbioru punktów i dla tych (nowo mianowanych) punktów określamy iloczyn skalarny. Gdy punkty są parami liczb rzeczywistych, ów iloczyn skalarny punktów $P = (x_1, x_2)$ i $Q = (y_1, y_2)$ to liczba

$$P \cdot Q := g_{11}x_1y_1 + g_{12}x_1y_2 + g_{21}x_2y_1 + g_{22}x_2y_2,$$

gdzie g_{ij} są dobrane w ten sposób, by liczba $P \cdot P$ była zawsze nieujemna.





Dysponując iloczynem skalarnym, określamy długość wektora v jako $|v| := \sqrt{v \cdot v}$, a kąty mierzymy, obliczając ich kosinus według wzoru $\cos vw := \frac{v \cdot w}{|v||w|}$.

Na przykład geometria zwykłej płaszczyzny to zbiór \mathbb{R}^2 z iloczynem danym przez $g_{11} = g_{22} = 1$, $g_{12} = g_{21} = 0$.

Model Poincarégo na półpłaszczyźnie (mPpp)

Gdy zbiorem punktów będzie $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0\}$, a iloczyn skalarny dany będzie przez $g_{11} = g_{22} = 1/x_1^2$ i $g_{12} = g_{21} = 0$, to będziemy mieli do czynienia z modelem płaszczyzny Bolyaia–Łobaczewskiego. Rzut oka na wzór na kosinus od razu pozwala zauważyć, że model ten jest *euklidesowokątny*, co oznacza, że narysowane krzywe w naszym modelu w sensie płaszczyzny Bolyaia–Łobaczewskiego tworzą kąt o tej samej rozwartości, jak ten, który widzimy euklidesowym okiem na rysunku (owe $1/x_1^2$ w liczniku i mianowniku się skrócą). Zatem inne pojęcia geometrii Bolyai–Łobaczewskiego (np. proste) muszą w naszym modelu wyglądać inaczej niż ich euklidesowe odpowiedniki – gdyby bowiem wyglądały tak samo, otrzymalibyśmy nie geometrię Bolyaia–Łobaczewskiego, lecz geometrię półpłaszczyzny euklidesowej.

Nie wchodząc w szczegóły różniczkowej obróbki tego modelu, przyjmijmy, że udało się nam stwierdzić, iż prostą opisaną za pomocą tego iloczynu skalarnego (jedną, konkretną prostą) w tym modelu jest $(t, 0)$ dla $t > 0$, a jej punkty są sparametryzowane za pomocą długości s jako $(e^s, 0)$. Zatem odległość punktów $A = (e^{s_1}, 0)$ i $B = (e^{s_2}, 0)$ jest w geometrii Bolyai–Łobaczewskiego równa

$$|s_1 - s_2| = \left| \ln \frac{e^{s_1}}{e^{s_2}} \right| = \left| \ln |A, B; (0, 0), \infty| \right|,$$

gdzie symbol, który znajduje się między wartościami bezwzględными wewnątrz logarytmu w ostatnim członie powyższej równości, to dwustosunek (patrz str. 14), a symbolem ∞ został oznaczony kierunek prostej. Ten kierunek, podobnie jak punkt $(0, 0)$ nie należy do modelu, nie jest punktem modelowanej płaszczyzny B–Ł, ale – można powiedzieć, że oba te punkty „kończą” prostą. Dlatego też Hilbert wprowadził zwyczaj nazywania ich *końcami prostej*. W mPpp odległość punktów będziemy mierzyli za pomocą dwustosunku:

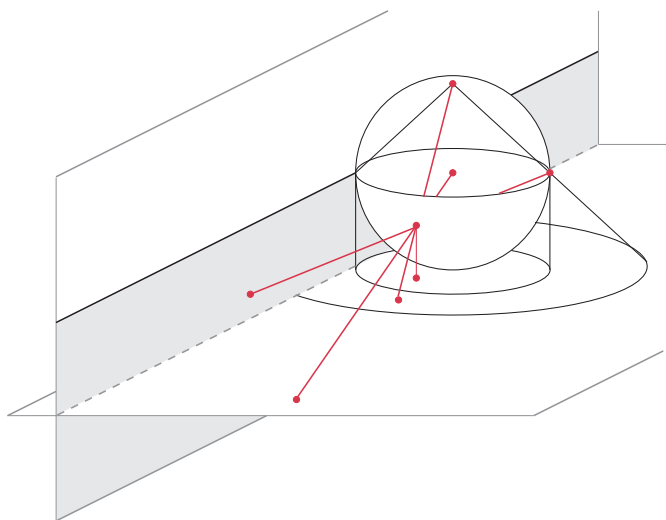
$$\left| \ln |(A, B; \text{koniec}_1 \text{ prostej } AB, \text{koniec}_2 \text{ prostej } AB)| \right|.$$

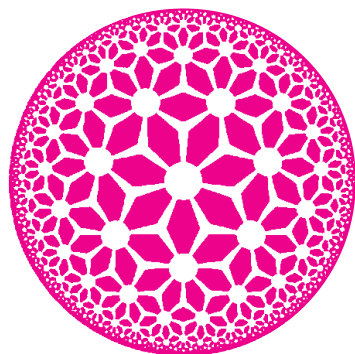
Te skąpe wiadomości wzięte na wiarę pozwolą nam poznać wiele własności geometrii Bolyaia–Łobaczewskiego za pomocą mPpp i innych modeli.

Innych, bo z mPpp można w prosty sposób uzyskać jeszcze inne przydatne modele. Widoczna na rysunku obok półsfera jest styczna do brzegu rozpatrywanej dotąd (szarej) półpłaszczyzny. Można na nią zrzutować stereograficznie mPpp, otrzymując model Poincarégo na półsfery (mPp). On z kolei może być zrzutowany stereograficznie (z najwyższego punktu „drugiej połowy” półsfery) na płaszczyznę styczną do półsfery w jej „południowym” biegunie – tak otrzymamy model Poincarégo w kole (mPk). Możemy też mPp zrzutować prostokątnie na tę samą płaszczyznę – powstanie model Kleina (mK), też w kole, ale mniejszym (zamiast na dół można rzutować do góry na koło „zamykające” półsferę). Jeszcze inny model otrzymamy, rzutując mPp na tę płaszczyznę ze środka półsfery – ten model (mp) działać będzie na całej płaszczyźnie.

Zawarcie bliższej znajomości z tymi modelami pozwala na obserwowanie rozmaitych faktów mających miejsce w geometrii B–Ł. Część z nich postaram się zaprezentować.

Punkt mający w modelowanej geometrii współrzędne $(e^s, 0)$ ma w modelu współrzędne $(s, 0)$.





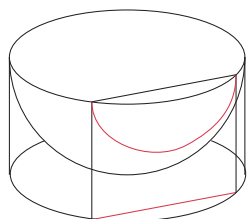
Proste, kąty, odległości w różnych modelach

Ponieważ w geometrii euklidesowej inwersje zachowują dwustosunek, więc inwersje względem prostych i okręgów (w istocie ich połówek) prostopadłych do brzegu mPpp zachowują odległości B-Ł (są izometriami, a nawet symetriami), a więc wszystko, co otrzymamy za ich pomocą z wyróżnionej prostej B-Ł, to będą proste B-Ł. Morał: w mPpp *prostymi w sensie B-Ł są wszystkie prostopadłe do brzegu proste i mieszczące się w modelu łuki okręgów, a inwersje względem nich są w sensie B-Ł symetriami.*

Czytelnika Zaniepokojonego dziwnym sformulowaniem o łukach okręgów w poprzednim zdaniu (przecież to po prostu półokręgi!) spieszę uspokoić – w tym szaleństwie jest metoda. Jeśli mianowicie przyjrzymy się, jak otrzymujemy inne modele Poincarégo, okaże się, że wyróżnione wyżej zdanie też się do nich stosuje! I to tłumaczy nienajprostsze sformułowanie: o ile bowiem w modelu na półsfery te łuki są również półokręgami, to już w modelu w kole – nie.

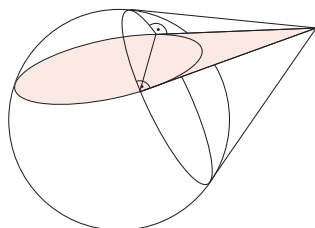
A na tym nie koniec. Ponieważ inwersje (więc i rzut stereograficzny) zachowują dwustosunek i kąty między krzywymi, więc we wszystkich modelach Poincarégo *odległości mierzy się logarytmem dwustosunku punktów i końców prostej, na której one leżą, a kąty w sensie B-Ł mają takie same rozwartości, jak kąty zmierzone w modelu.*

Jak widać, umknęły nam pozostałe dwa modele: Kleina i na całej płaszczyźnie. Zajmijmy się pierwszym z nich.



W modelu na półsfery, jak już wspomnieliśmy, proste to półokręgi. Jeśli tak, to leżą one w płaszczyźnie prostopadłej do tej, na którą rzutujemy mPp, by otrzymać model Kleina. Zatem rzutują się one jako odcinki. Dokładniej: *w modelu Kleina proste w sensie B-Ł to cięciwy modelu.*

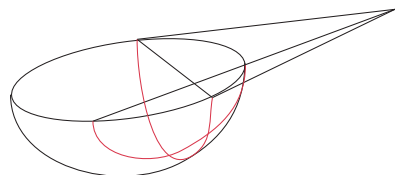
Uwaga **Jeszcze jeden...** na stronie 15 upewnia nas, że *odległości w modelu Kleina również mierzy się logarytmem z dwustosunku.*



Pozostaje kwestia kątów. W modelu Kleina (oczywiście, bo w przeciwnym przypadku byłoby to zwykłe euklidesowe koło) nie ma takiej wygody, jak w modelach Poincarégo. Tu podamy tylko, jak przedstawia się w mK sprawa prostopadłości. W tym celu należy przypomnieć sobie (bądź udowodnić, gdyby się nie pamiętało) twierdzenie ze stereometrii:

jeśli na sferze dwa okręgi przecinają się pod kątem prostym, to płaszczyzna jednego z nich przechodzi przez wierzchołek stożka utworzonego ze stycznych do sfery w punktach drugiego z nich.

Odnosząc widoczną na rysunku sytuację do mPp i rzutując ją na mK, otrzymujemy wniosek, że *w modelu Kleina proste prostopadłe to takie, że przedłużenie jednej z nich przechodzi przez punkt przecięcia stycznych w końcach drugiej (jej biegun).* I to na razie wystarczy nam do obserwacyjnego badania geometrii B-Ł. Bo przecież o oglądanie od początku nam chodzi.

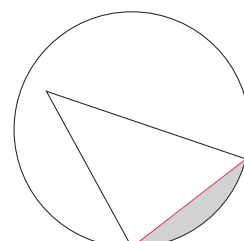
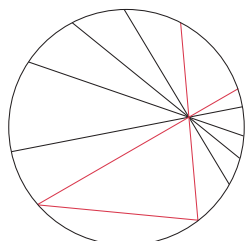


Pozostał jeszcze model na płaszczyźnie. Jego funkcja okazała się czysto formalna – geometrycy rysują w nim sytuacje z geometrii B-Ł wtedy, gdy chcą podkreślić, że tym razem nie będą posługiwać się modelami. Czytelnik Zaciekawiony może sprawdzić, że proste B-Ł w tym modelu to proste przechodzące przez punkt styczności mPp z płaszczyzną oraz łuki hiperbol, dla których te proste są asymptotami.

Co od razu widać w modelu Kleina?

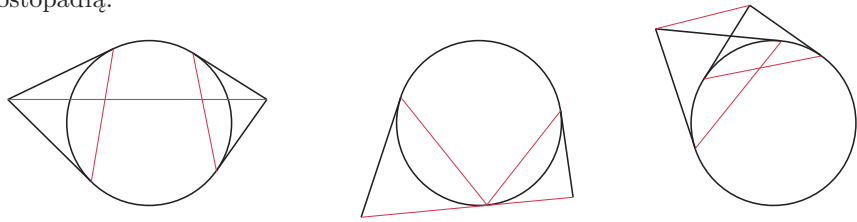
Przede wszystkim widać, że przez punkt poza prostą przechodzi wiele prostych z nią rozłącznych. Wśród nich są dwie, mające z daną prostą wspólne końce – to *równoległe*, a pozostałe rozłączne to *nadrównoległe*.

Widać też, że we wnętrzu kąta istnieje obszar, z którego nie można poprowadzić prostej przecinającej oba jego ramiona – oddzielająca go prosta nazywa się *zagradzająca*.



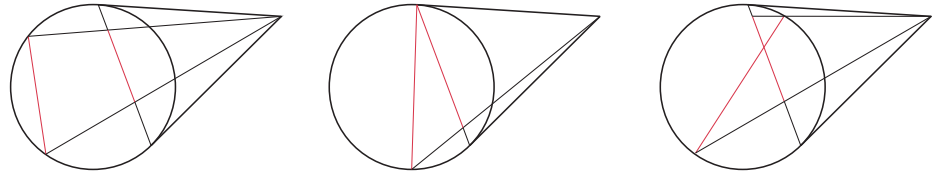


Widać też, że proste są nadrownoległe wtedy i tylko wtedy, gdy mają wspólną prostopadłą.

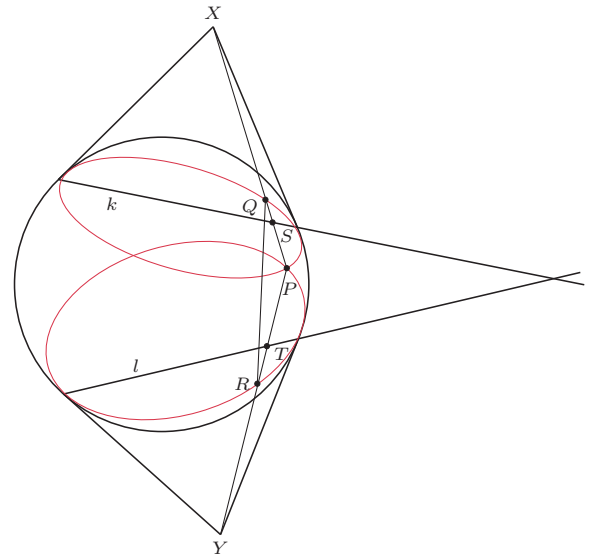
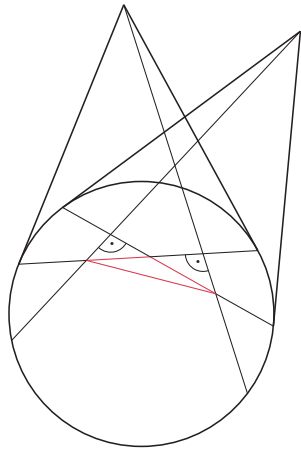


Istotnie, wspólna prostopadła zawierać się musi w prostej łączącej bieguny, a ta w przypadku prostych przecinających się czy równoległych nie przecina się z modelem, czyli wnętrzem koła.

Rozpatrując podobne rysunki, stwierdzamy, że rzut prostokątny prostej na prostą nigdy nie jest prostą – jest odcinkiem dla prostych przecinających się i nadrownoległych, a w przypadku równoległych – półprostą.



Z kolei rysunek z lewej pokazuje trójkąt bez ortocentrum (wysokości kolorowego trójkąta przecinają się poza modelem). Z prawej zaś mamy trójkąt PQR , na którym nie można opisać okręgu (te owale to elipsy styczne do brzegu modelu w końcach prostych k i l) k i l to B-Ł symetralne PQ i PR – nie wynika to z dotychczasowych rozważań, ale nie powinno dziwić, że nie wszystko daje się opowiedzieć w tak krótkiej formie.

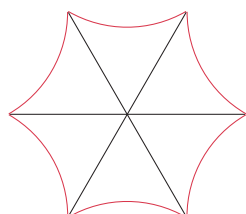
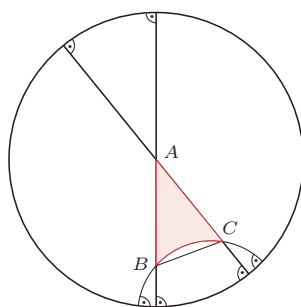


Co od razu widać w modelu Poincarégo w kole?

Oczywiście, sytuacje związane z kątami, bo w modelach Poincarégo rozwartość kątów w sensie B-Ł jest taka, jak na rysunku. W mPk proste to łuki okręgów prostopadłe do brzegu, ale też i średnice modelu (powstają z rzutów półokręgów wielkich półsfery). Wobec tego na rysunku mamy trójkąt ABC o sumie kątów mniejszej od 180° – byłoby 180° , gdyby bok BC był odcinkiem, a nie łukiem. A za pomocą inwersji można dowolny trójkąt doprowadzić do takiego położenia.

Czytelnik Dociekliwy zauważy, że istnieją trójkąty o sumie kątów dowolnie bliskiej zeru (mały kąt przy A i BC bliskie zagradzającej).

W grafikach Eschera można odnaleźć inne spojrzenie na takie trójkąty. Jeśli trójkąt z poprzedniego rysunku będzie równoramienny i będzie miał w A kąt $\frac{360^\circ}{n}$, to – układając n takich trójkątów wokół A – uzyskamy n -kąt foremny. Z poprzedniej uwagi wynika, że możemy pozostałe dwa kąty dobrać dowolnie, byleby suma kątów trójkąta nie przekroczyła 180° . Niech zatem będą równe po $\frac{360^\circ}{2k}$ (oczywiście $\frac{1}{n} + \frac{1}{k} < \frac{1}{2}$). Wówczas kąty otrzymanego n -kąta będą równe $\frac{360^\circ}{k}$. Oznacza to, że wokół każdego z tych wierzchołków można ułożyć k takich wielokątów (Czytelnik Błyskotliwy domyśli się, że robi się to, stosując inwersje względem boków wielokąta).



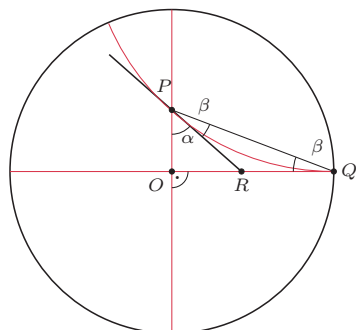


Parkietaże na okładce i wewnątrz numeru wykonał Przemysław KICIAK

Otrzymamy w ten sposób pokrywającą płaszczyznę B–Ł siatkę n -kątów po k w każdym wierzchołku. Takie siatki z upodobaniem rysował Escher, a nasza okładka zawiera kilka takich, ale już rodzimej produkcji.

Jak Łobaczewski obliczył kąt równoległości

Wystawmy z punktu O na prostej k prostopadłą i obierzmy na niej punkt P odległy o x od k . Poprowadźmy teraz przez P równoległą do k . Kąt, jaki tworzy ona z OP , to *kąt równoległości*. Jego rozwartość zależy od x – Nikołaj Łobaczewski pierwszy obliczył w jaki sposób. Oto obliczenie w mPk. Na rysunku B–Ł proste są kolorowe, czarne odcinki to odcinki materii, z jakiej jest zrobiony model, czyli euklidesowe; PR to styczna. Chcemy obliczyć kąt α . Ponieważ $\alpha + 2\beta = \frac{\pi}{2}$, więc $\beta = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$. Z kolei



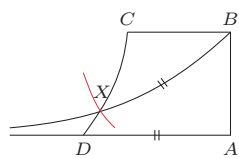
$$x = \ln \frac{(r + r \operatorname{tg} \beta) \cdot r}{r \cdot (r - r \operatorname{tg} \beta)} = \ln \frac{1 + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \beta},$$

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}},$$

$$\text{więc } e^x = \frac{1 + \frac{1 - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}}{1 - \frac{1 - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}} = \frac{2}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}, \quad \text{a zatem } \alpha = 2 \operatorname{arc} \operatorname{ctg} e^x.$$

Jak Bolyai styczną skonstruował

Konstrukcja stycznej to wykreślenie jej B–Ł cyrklem i B–Ł linijką. Konstrukcja ta, narysowana w stylu modelu na płaszczyźnie, wygląda tak jak obok, czyli rysujemy czworokąt o trzech kątach prostych. Czwararty kąt jest (oczywiście) ostry. Zatem bok BC jest krótszy od AD . Promieniem AD kreślimy więc okrąg o środku B . Jego przecięcie z bokiem CD oznaczamy X . Wtedy prosta AD jest równoległa do BX . Czyli tego trzeba dowieść.

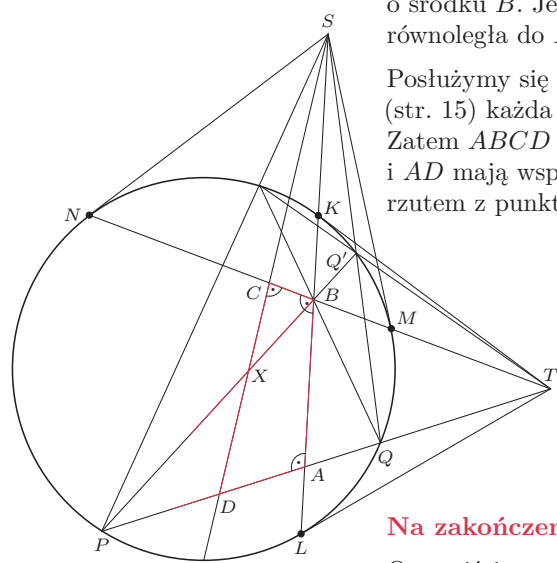


Posłużymy się modelem Kleina. Wobec uwagi kończącej punkt **Harmoniczność** (str. 15) każda prosta przez S jest prostopadła do MN , a każda przez T do KL . Zatem $ABCD$ jest w modelu Kleina czworokątem o trzech kątach prostych. BX i AD mają wspólny koniec, więc są równoległe. Ponadto czwórka B, X, P, Q' jest rzutem z punktu S czwórki A, D, P, Q , a więc

$$\frac{BP \cdot XQ'}{BQ' \cdot XP} = \frac{AP \cdot DQ}{AQ \cdot DP},$$

co oznacza, że odcinki BX i AD są B–Ł przystające.

Gdy chodzi o konstrukcje w modelu Kleina, do tej pory otwarty jest postawiony przez Jana Mycielskiego problem, czy konstrukcje w kole wykonane euklidesową linijką i cyrklem dają ten sam zbiór punktów konstruowalnych, co konstrukcje wykonane B–Ł linijką i B–Ł cyrklem.



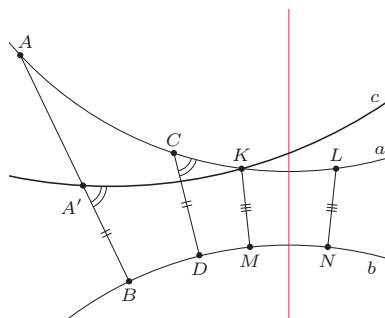
Na zakończenie

Oczywiście, przedstawienie geometrii Bolyai–Łobaczewskiego na kilku stronach nie jest możliwe. Pozostaje wiele do samodzielnego zwiedzania przez ewentualnie zainteresowanych.

Pokazaliśmy, że dla prostych nadrównoległych istnieje wspólna prostopadła – jak ją skonstruować?

Dawid Hilbert podał następujący przepis (rysujemy znów w mp). Obierzmy na jednej z nich, na a , punkty A i C i zrzućmy je prostokątnie na drugą, b , otrzymując punkty B i D . Jeśli $AB = CD$, czworokąt $ABDC$ ma oś symetrii, a ona jest prostopadła do AC i BD , o co nam chodziło.

Gdy $AB > CD$, obieramy na AB taki punkt A' , że $A'B = CD$. Z A' prowadzimy taką prostą c , że kąt między DC i a jest taki, jak między BA' i c . Prosta c przecina (?) a w punkcie K . Odłóżmy odcinek $A'K$ od punktu C , otrzymując L . Mamy $KM = LN$, gdzie M i N to rzuty prostokątne K i L na b (jest tak, bo figury $aCDb$ i $a'A'Bb$ są przystające). Oś symetrii czworokąta $KMNL$ jest szukaną wspólną prostopadłą.



Znak zapytania wskazuje, że trzeba jeszcze wykazać, iż punkt przecięcia a i c istnieje.



Proste w geometrii B–Ł są jednoznacznie wyznaczone nie tylko przez dwa punkty, lecz także przez punkt i koniec, a nawet dwa końce.

Cechą szczególną geometrii B–Ł jest możliwość zdefiniowania odległości wewnątrz geometrii, czego np. geometria euklidesowa jest pozbawiona (i po wzorze odległości musi sięgać do fizyki). W konsekwencji całą tę geometrię można opisać, posługując się wyłącznie pojęciem należenia punktu do odcinka.

W dalszej konsekwencji pole trójkąta można obliczyć z sumy jego kątów.

Gdy już mowa o polu, to pole powierzchni koła jest na płaszczyźnie B–Ł większe od pola koła euklidesowego o tym samym promieniu.

Można też na płaszczyźnie B–Ł dokonywać paradoksalnych rozkładów, co nie jest możliwe na płaszczyźnie euklidesowej.

Słowem, jest co zwiedzać.

Narzędzia

W poprzednich rozdziałach używaliśmy własności dwustosunku, inwersji i rzutu stereograficznego, które tutaj chcemy przypomnieć.

Dwustosunek (inaczej: stosunek anharmoniczny)

Zacznijmy od współrzędnych barycentrycznych na prostej: Jeśli punkty A i B obciążymy masami m_A i m_B , to środek ciężkości znajdzie się w punkcie $P = \frac{m_A \cdot A + m_B \cdot B}{m_A + m_B}$. Parę liczb (m_A, m_B) można uznać za współrzędne barycentryczne punktu P .

Współrzędne barycentryczne dane są (jak łatwo zauważyć) z dokładnością do proporcjonalności. Równie łatwo zauważyć, że nie ma na prostej punktu, dla którego suma tych współrzędnych jest równa 0. Można jednak uzupełnić prostą o taki punkt, który będzie środkiem ciężkości o zerującej się sumie współrzędnych – prosta staje się jakby okręgiem (dla konserwatorów: albo prostą rzutową, albo – bez różnicy – prostą płaszczyzny uzwarconej punktem).

Ponieważ nie ma punktu o współrzędnych barycentrycznych $[0, 0]$, więc każdy punkt można przedstawić jako $[1, a]$, albo $[0, 1]$.

Prosta w takich współrzędnych składa się z punktów postaci $\lambda A + \mu B$, gdzie $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$. Dwustosunek punktów P, Q, R, S to liczba

$$(P, Q; R, S) := \frac{(\lambda_P \mu_R - \lambda_R \mu_P)(\lambda_Q \mu_S - \lambda_S \mu_Q)}{(\lambda_P \mu_S - \lambda_S \mu_P)(\lambda_Q \mu_R - \lambda_R \mu_Q)}.$$

W szczególności $(A, B; P, Q) = \frac{\lambda_Q \mu_P}{\lambda_P \mu_Q}$, (bo $\lambda_A = \mu_B = 1$ i $\mu_A = \lambda_B = 0$).

Gdy dodany punkt pominiemy, możemy dwustosunek opisać za pomocą zwykłych współrzędnych i odległości. W tym celu zapiszmy P i Q tak, by na pierwszej współrzędnej była jedynka:

$$P = [\lambda_P + \mu_P, \lambda_P a + \mu_P b] = \left[1, \frac{\lambda_P}{\lambda_P + \mu_P} a + \frac{\mu_P}{\lambda_P + \mu_P} b\right] \text{ i podobnie } Q.$$

Mamy więc $P = \frac{\lambda_P}{\lambda_P + \mu_P} A + \frac{\mu_P}{\lambda_P + \mu_P} B$ i $Q = \frac{\lambda_Q}{\lambda_Q + \mu_Q} A + \frac{\mu_Q}{\lambda_Q + \mu_Q} B$.

Stąd

$$\begin{aligned} P - A &= \frac{\mu_P}{\lambda_P + \mu_P} (B - A), & Q - A &= \frac{\mu_Q}{\lambda_Q + \mu_Q} (B - A), \\ P - B &= \frac{-\lambda_P}{\lambda_P + \mu_P} (B - A), & Q - B &= \frac{-\lambda_Q}{\lambda_Q + \mu_Q} (B - A). \end{aligned}$$

Zatem

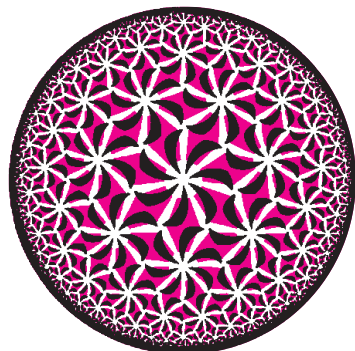
$$\frac{\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BQ}}{\overrightarrow{AQ} \cdot \overrightarrow{BP}} = \frac{(P - A)(Q - B)}{(P - B)(Q - A)} = \frac{\lambda_Q \mu_P}{\lambda_P \mu_Q} = (A, B; P, Q).$$

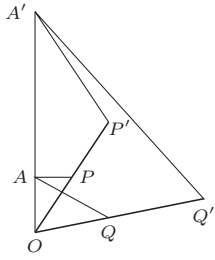
Więcej o współrzędnych barycentrycznych można przeczytać w moich artykułach w Δ_{12}^{03} i Δ_{18}^{03} .

Gdy m_1 i m_2 są różnych znaków, środek ciężkości leży na zewnątrz odcinka AB po tej stronie, z której wartość bezwzględna obciążenia jest większa. Gdy te wartości są równe, nie może „znaleźć sobie miejsca”. Dodatkowy punkt „leży na obu końcach” prostej.

Czytelnik Pracowity może sprawdzić, że

$$\begin{aligned} (P, Q; R, S) &= (R, S; P, Q) = \\ &= \frac{1}{(P, Q; S, R)} = 1 - (P, R; Q, S). \end{aligned}$$





i dla B podobnie

Nasuwa się pytanie, czemu od razu nie podaliśmy tak prostej definicji dwustosunku – powód był jeden – w modelu Poincarégo na półpłaszczyźnie (patrz str. 10) jeden z końców prostej może być niewłaściwy.

$\frac{AP \cdot BQ}{AQ \cdot BP}$ jest niezmiennikiem inwersji

Z lematu o inwersji (str. 16) mamy

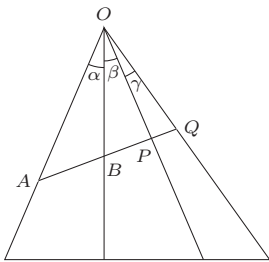
$$\frac{AP}{A'P'} = \frac{OP}{OA'}, \quad \frac{AQ}{A'Q'} = \frac{OQ}{OA'} \quad \text{oraz} \quad \frac{BP}{B'P'} = \frac{OP}{OB'}, \quad \frac{BQ}{B'Q'} = \frac{OQ}{OB'}$$

$$\text{a zatem} \quad \frac{A'P'}{A'Q'} = \frac{OA'}{OP} \cdot \frac{OQ}{OA'} \cdot \frac{AP}{AQ} \quad \text{oraz} \quad \frac{B'Q'}{B'P'} = \frac{OB'}{OQ} \cdot \frac{OP}{OB'} \cdot \frac{BQ}{BP}$$

a więc łącznie

$$\frac{A'P' \cdot B'Q'}{A'Q' \cdot B'P'} = \frac{AP \cdot BQ}{AQ \cdot BP}$$

$\frac{AP \cdot BQ}{AQ \cdot BP}$ jest niezmiennikiem rzutu środkowego (i równoległego)



Przy oznaczeniach z rysunku mamy dla trójkątów APO , AQO , BPO , BQO

$$\frac{AP}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{AO}{\sin \sphericalangle OPA}, \quad \frac{AQ}{\sin(\alpha + \beta + \gamma)} = \frac{AO}{\sin \sphericalangle OQA},$$

$$\frac{BP}{\sin \beta} = \frac{BO}{\sin \sphericalangle OPA}, \quad \frac{BQ}{\sin(\beta + \gamma)} = \frac{BO}{\sin \sphericalangle OQA},$$

więc

$$\frac{AP \cdot BQ}{AQ \cdot BP} = \frac{\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\beta + \gamma)}{\sin(\alpha + \beta + \gamma) \cdot \sin \beta}$$

Zatem skoro dwustosunek zależy jedynie od kątów, więc nie zmienia się przy rzutowaniu środkowym. Dowód dla przypadku rzutu równoległego pozostawiamy Czytelnikowi Dokładnemu.

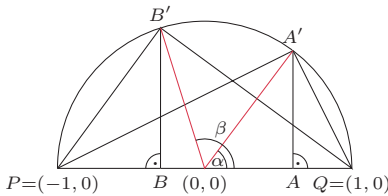
Jeszcze jeden szczególny przypadek

Gdy punkty A i B leżą na półokręgu zamkniętym średnicą PQ , a ich rzutami na tę średnicę są punkty A' i B' , wówczas

$$\frac{PA \cdot BQ}{PB \cdot QA} = \left(\frac{PA' \cdot QB'}{PB' \cdot QA'} \right)^2$$

W oznaczeniach z rysunku mamy bowiem

$$\frac{PA \cdot PB}{PB \cdot QA} = \frac{(1 + \cos \alpha)(1 - \cos \beta)}{(1 + \cos \beta)(1 - \cos \alpha)}$$



Natomiast z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy

$$(PA')^2 = (\cos \alpha + 1)^2 + \sin^2 \alpha = 2(1 + \cos \alpha),$$

$$(PB')^2 = (\cos \beta + 1)^2 + \sin^2 \beta = 2(1 + \cos \beta),$$

$$(QA')^2 = (\cos \alpha - 1)^2 + \sin^2 \alpha = 2(1 - \cos \alpha),$$

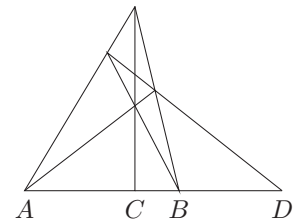
$$(QB')^2 = (\cos \beta - 1)^2 + \sin^2 \beta = 2(1 - \cos \beta),$$

co kończy uzasadnienie, bo dwójki się skrócą.

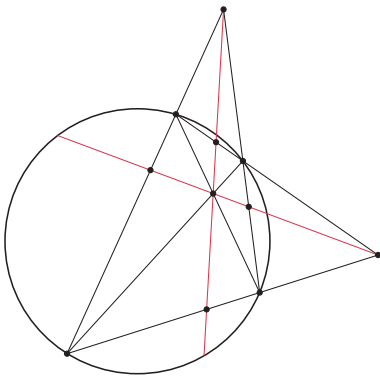
Harmonicznosc

Gdy $(A, B; C, D) = -1$, czwórkę A, B, C, D nazywamy *harmoniczną*. Czytelnik Skrupulatny udowodni, że przedstawiona z prawej strony sytuacja realizuje właśnie taką czwórkę – wystarczy zastosować twierdzenie Cevy i Menelaosa.

Czytelnik Spostrzegawczy zaś zgodzi się, że to uogólnienie środka – jeśli punkt D odsuniemy do nieskończoności, punkt C stanie się środkiem AB .



Z lewej natomiast mamy sytuację, gdy każde cztery punkty leżące na jednej prostej realizują czwórki harmoniczne. Można też udowodnić (np. Δ_{09}^{09}), że styczne do okręgu z S i T przechodzą przez punkty przecięcia okręgu przez kolorowe linie.



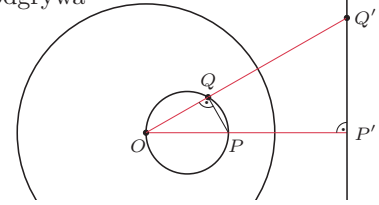


Inwersja i rzut stereograficzny

Inwersję tradycyjnie definiuje się z użyciem odległości. *Obrazem inwersyjnym punktu P względem okręgu o środku $O \neq P$ i promieniu r jest taki punkt P' , że $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OP'} = r^2$. Wynika z tego, że inwersja jest involucją (czyli jej dwukrotne wykonanie jest tożsamością). Często uzupełnia się tę definicję dodaniem do płaszczyzny punktu w nieskończoności i umową, że ten punkt i O zamieniają się w inwersji. W badaniu inwersji ważną rolę odgrywa*

Lemat. $\sphericalangle OPQ = \sphericalangle OQ'P'$.

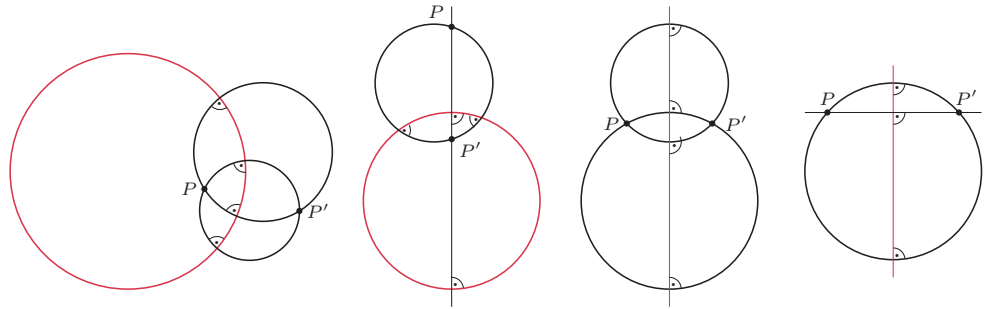
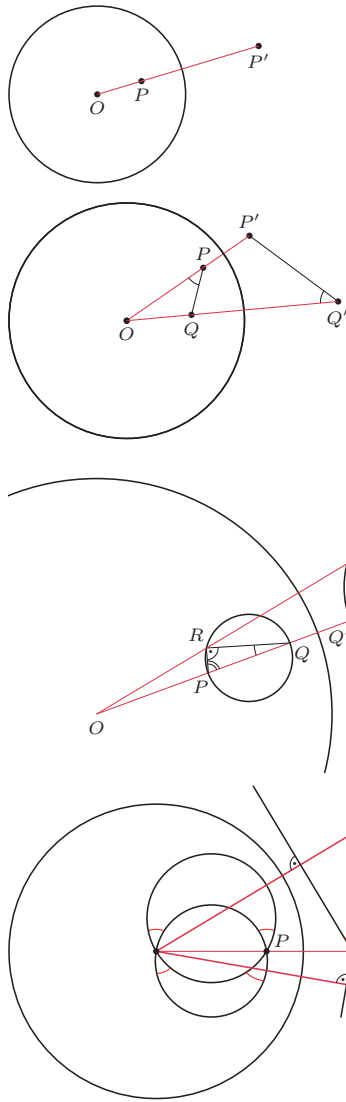
Wynika to z tego, że trójkąty OPQ i $OQ'P'$ są podobne, gdyż mają wspólny kąt przy O oraz z definicji inwersji zachodzi $\frac{OP}{OQ} = \frac{OQ'}{OP'}$.



Obrazem prostej przechodzącej przez O jest ona sama. Z lematu bezpośrednio wynika natomiast, że obrazem prostej nieprzechodzącej przez O jest przechodzący przez O okrąg (jego średnica leży na prostej prostopadłej do tej prostej – patrz rysunek). Zatem obrazem okręgu przechodzącego przez O jest prosta przez O nieprzechodząca. Z podobnego powodu obrazem okręgu nieprzechodzącego przez O jest okrąg również przez O nieprzechodzący. Tutaj korzystamy dwukrotnie z lematu, a także z sumy kątów trójkąta.

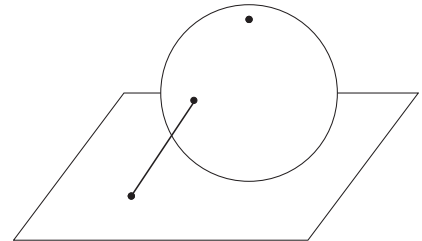
Inwersja nie zmienia kątów między krzywymi. Ponieważ kąt, jaki tworzą krzywe, to kąt, jaki tworzą styczne do nich, wystarczy, aby zauważyć, że kąty między prostymi przechodzą na takie same kąty między okręgami, na które te proste przechodzą, bo okręgi oba razy przecinają się pod tym samym kątem.

Prostym, ale ważnym wnioskiem z tego jest spostrzeżenie, że okrąg, przecinający okrąg inwersyjny pod kątem prostym, w inwersji przechodzi na siebie (zamieniają się jedynie jego łuki: zewnętrzny i wewnętrzny). Płynie stąd morał, że inwersję można zdefiniować za pomocą jedynie prostopadłości, a co więcej, że ta definicja czyni z symetrii osiowej też swego rodzaju inwersję.



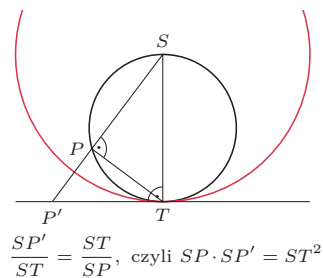
Definicja inwersji jedynie za pomocą prostopadłości pozwala na jej stosowanie również na sferze.

Rzut stereograficzny sfery na płaszczyznę do niej styczną w „biegunie południowym” każdemu punktowi sfery przyporządkowuje jego rzut środkowy z „bieguna północnego”.



Rozważenie inwersji w trójwymiarowej geometrii (czyli rozpatrywanie inwersji względem sfery z taką samą definicją, jak w przypadku okręgu) pokazuje ponadto, że rzut stereograficzny jest inwersją względem dwukrotnie większej sfery.

Wynika z tego, że wymienione wyżej własności inwersji (w szczególności zachowywanie kątów między krzywymi) przenoszą się również na rzut stereograficzny.



$$\frac{SP'}{ST} = \frac{ST}{SP}, \text{ czyli } SP \cdot SP' = ST^2$$