Rozpoczniemy od przedstawienia naszego problemu w języku teorii grafów. Mamy do czynienia z grafem $\mathcal{G} = (V, E)$ o n wierzchołkach, po którym w losowy sposób spacerujemy – stojąc w dowolnym wierzchołku, z jednakowym prawdopodobieństwem wybieramy dowolnego jego sąsiada, aby przejść do niego w następnym kroku. Niech $p_u(v)$ będzie prawdopodobieństwem zdarzenia, że wierzchołek v został odwiedzony jako ostatni, jeśli startowaliśmy z u. Interesujący nas warunek możemy teraz zapisać jako

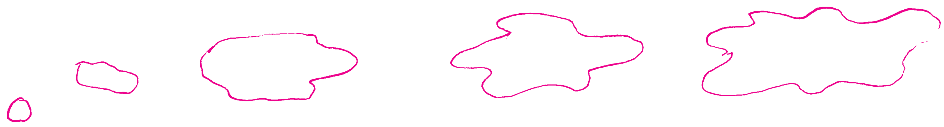
($\star$) dla dowolnych, różnych wierzchołków u, v zachodzi $p_u(v) = 1/(n-1)$.

Załóżmy, że spełniony jest powyższy warunek i wybierzmy dowolne dwa *niepołączone* wierzchołki u, v. Niech d będzie stopniem u, a S zbiorem jego sąsiadów. Korzystając ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite, dostajemy $p_u(v) = \frac{1}{d}\sum_{s\in S} p_{u,s}(v)$, gdzie $p_{u,s}(v)$ jest prawdopodobieństwem zakończenia na v jeśli startowaliśmy od u pod warunkiem zdarzenia, że pierwszym odwiedzonym wierzchołkiem był s. Zauważmy ponadto, że $p_{u,s}(v) \geqslant p_s(v) \overset{(\star)}{=} p_u(v)$, gdyż $p_{u,s}(v)$ „obejmuje” wszystkie te spacery (liczone od s), co $p_s(v)$ oraz te, które nie odwiedzały u przed dotarciem do v. Gdyby istniał choć jeden taki spacer, mielibyśmy $p_u(v) = \frac{1}{d}\sum_{s\in S} p_{u,s}(v) > \frac{1}{d}\sum_{s\in S} p_u(v) = p_u(v)$, zatem sprzeczność. Nie istnieje więc spacer, który startuje z sąsiada u, przechodzi (niekoniecznie jednokrotnie) przez wszystkie wierzchołki poza u i v, a na końcu odwiedza v. Wnioskujemy stąd, że

($*$) $G \setminus \{u, v\}$ jest niespójny dla dowolnych niepołączonych u, v.

Okazuje się, że graf, który spełnia ($\star$) i ($*$), musi być łańcuchem albo kliką. Jest to ciekawe i przystępne zadanie z matematyki dyskretnej, które polecamy wykonać Czytelnikom Ambitnym. Czytelnikom Niecierpliwym polecamy zaś lekturę marginesu. Howgh!

Przypuśćmy, że $\mathcal{G}$ spełnia ($\star$) i ($*$) oraz (A) nie jest kliką, (B) nie jest cyklem.
(1) [A] $\Rightarrow$ istnieją dwa niepołączone wierzchołki;
(2) [$*$+1] $\Rightarrow$ żaden wierzchołek nie ma stopnia $n-1$;
(3) [$\star$] $\Rightarrow$ $\mathcal{G}\setminus\{x\}$ jest **spójny** dla dowolnego x (inaczej $p_u(x) = 0$);
(4) [3] $\Rightarrow$ wszystkie wierzchołki mają stopień $\geqslant 2$;
(5) [B+4] $\Rightarrow$ istnieje wierzchołek stopnia $\geqslant 3$ (oznaczmy go u);
(6) [2] $\Rightarrow$ istnieje v niepołączone z u;
(7) [6+$*$] $\Rightarrow$ $\mathcal{G}\setminus\{u,v\}$ ma co najmniej dwie spójne składowe $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$;
(8) [3] $\Rightarrow$ istnieją takie $c_1 \in \mathcal{C}_1, c_2 \in \mathcal{C}_2$, że $\mathcal{G}\setminus\{u, c_1, c_2\}$ jest spójny;
(9) [8+5] $\Rightarrow$ $\mathcal{G}\setminus\{c_1, c_2\}$ jest spójny;
(10) [7+8] $\Rightarrow$ c_1, c_2 nie są połączone;
(11) [$*$+9+10] $\Rightarrow$ sprzeczność!



Zadania

Redaguje Łukasz BOŻYK

M 1570. Czy istnieje taki wielościan wypukły $\mathcal{W}$, który można rozciąć płaszczyzną na dwa wielościany podobne do $\mathcal{W}$?
Rozwiązanie na str. 10

M 1571. Wewnątrz trójkąta równobocznego ABC wyznacz zbiór takich punktów P, że miary kątów PAB, PBC, PCA tworzą w tej właśnie kolejności ciąg arytmetyczny.
Rozwiązanie na str. 2

M 1572. Oznaczmy przez $r(n)$ sumę n liczb będących resztami z dzielenia dodatniej liczby całkowitej n przez 1, 2, ..., n. Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele takich n, że $r(n) = r(n-1)$.
Rozwiązanie na str. 10

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 955. Na pochylnię tworzącą kąt α z poziomem należy wciągnąć ciężką paczkę. Dla jakiej rozwartości kąta β między kierunkiem siły wciągającej F i pochylnią wartość tej siły jest najmniejsza? Współczynnik tarcia paczki o powierzchnię pochylni wynosi f.
Rozwiązanie na str. 4

F 956. Średnia gęstość Ziemi wynosi $\rho \approx 5{,}5\,\mathrm{g/cm^3}$. Oszacuj wartość ciśnienia p w środku Ziemi. Przyspieszenie ziemskie (na jej powierzchni) wynosi $\mathrm{g} \approx 10\,\mathrm{m/s^2}$, a promień Ziemi $R \approx 6400\,\mathrm{km}$.
Rozwiązanie na str. 2