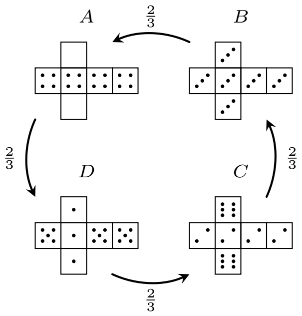
Nieprzechodnie kostki i ruletki

*Andrzej KOMISARSKI**

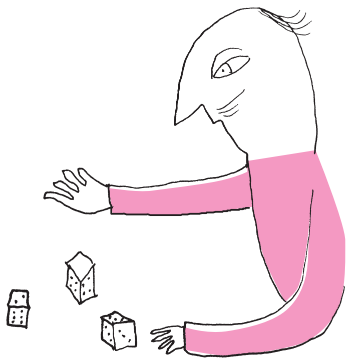
* Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Łódzki

W roku 1970 Martin Gardner opisał w dziale matematycznym czasopisma *Scientific American* kostki do gry odkryte kilka lat wcześniej przez statystyka Bradleya Efrona. Kostki te (oznaczmy je A, B, C oraz D) różnią się od zwykłej kostki tym, że na ich ściankach umieszczone są inne liczby oczek:



- kostka A – ma dwie ścianki puste, a na każdej z pozostałych czterech ścianek umieszczone są po 4 oczka;
- kostka B – na każdej ściance znajdują się 3 oczka;
- kostka C – na czterech ściankach znajdują się po 2 oczka, a na dwóch po 6;
- kostka D – na trzech ściankach znajduje się po 1 oczku, a na pozostałych po 5.

Rzucając kostkami A i B z prawdopodobieństwem $\frac{2}{3}$, uzyskamy więcej oczek na kostce A niż na B. Gdy rzucimy B oraz C, to z prawdopodobieństwem $\frac{2}{3}$ uzyskamy więcej oczek na kostce B niż na C. W podobny sposób (za każdym razem z prawdopodobieństwem $\frac{2}{3}$) kostka C okazuje się lepsza od D, zaś D lepsza od A. Czyli wśród tych czterech kostek nie ma najlepszej! Ujmując to inaczej: dla każdej kostki z tego zestawu można znaleźć w tym zestawie kostkę lepszą. Przy sortowaniu kostek od najgorszej do najlepszej powstaje cykl (patrz rysunek). Relacja między kostkami, polegająca na byciu lepszą, nie jest przechodnia! Ta nieprzechodniość fascynowała nie tylko matematyków, ale również socjologów i ekonomistów (którzy powiązali ją z *teorią wyboru* i z *modelami użyteczności losowej*).



Rozważmy dwuosobową grę: pierwszy gracz wybiera jedną z kostek A, B, C, D, drugi wybiera jedną z pozostałych, a następnie obaj rzucają wybranymi kostkami. Wygrywa ten, kto uzyska więcej oczek. Okazuje się, że w tej grze lepiej być drugim graczem, bo wybierając odpowiednio kostkę, wygrywa się z prawdopodobieństwem $\frac{2}{3}$.

Gra n „kostkami”. Załóżmy, że mamy jakiś inny skończony zbiór przyrządów do losowania liczb (niekoniecznie sześciennych kostek), który dawałby w analogicznej grze dużą szansę wygrania drugiemu graczowi. Jak duża może być ta szansa? Niech X_1 będzie dowolnym przyrządem z tego zbioru, zaś X_2, $X_3, \ldots$ określamy w ten sposób, że X_k jest tym przyrządem, który wybrałby gracz drugi, gdyby gracz pierwszy wybrał przyrząd X_{k-1}. Ponieważ przyrządów jest skończenie wiele, to w którymś momencie muszą zacząć się powtarzać, powstanie cykl. Możemy usunąć ze zbioru wszystkie przyrządy spoza tego cyklu – to może co najwyżej zwiększyć szansę drugiego gracza. Oznaczmy przez $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ zbiór takich tworzących cykl przyrządów. Niech odpowiedzią gracza drugiego na X_{k-1} będzie X_k (dla $k = 1, \ldots, n$). Przyjmijmy $X_0 = X_n$. Prawdopodobieństwo tego, że przy optymalnej grze obu graczy drugi wygra, wynosi $\min_{1\leqslant k\leqslant n} P(X_{k-1} < X_k)$.

Tym samym symbolem oznaczamy przyrząd oraz zmienną losową opisującą wynik losowania z użyciem przyrządu.

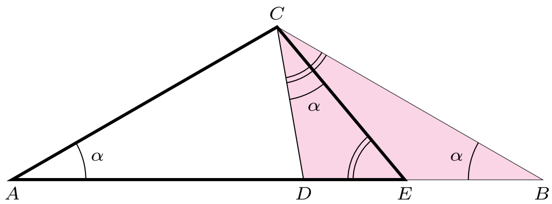
Wykażemy, że dla n przyrządów, tworzących cykl, prawdopodobieństwo to może przyjąć wartość co najwyżej

$$\pi_n = 1 - \frac{1}{4\cos^2\frac{180^\circ}{n+2}}.$$

$\pi_3 \approx 0{,}618$, $\pi_5 \approx 0{,}692$, $\pi_6 \approx 0{,}707$, $\pi_7 \approx 0{,}717$, $\pi_{12} \approx 0{,}732$
Ciąg (π_n) jest rosnący.

Dla zbioru n przyrządów prawdopodobieństwo to jest co najwyżej takie, jak dla pewnego cyklu zawartego w tym zbiorze, a więc nie przekracza π_n. Z drugiej strony, gdy wszystkie elementy zbioru należą do cyklu długości n, to może ono być równe π_n.

Geometryczne narzędzia. Będziemy potrzebować pewnych geometrycznych obserwacji. Rozważmy taki trójkąt równoramienny ABC, że $\sphericalangle CAB = \sphericalangle ABC = \alpha \leqslant 60^\circ$. Wybierzmy takie punkty D oraz E na boku AB, żeby $\sphericalangle ECD = \alpha$ oraz żeby punkt D leżał bliżej wierzchołka A niż punkt E. Wówczas $AE \cdot DB = AC^2$.

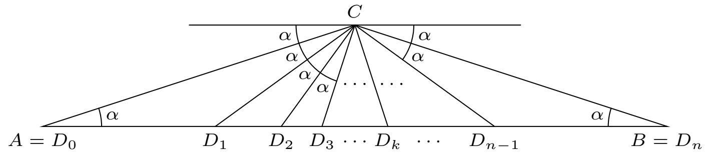


Trójkąty AEC i BCD są podobne, a stąd wynika, że

$$\frac{AE}{AC} = \frac{BC}{BD} = \frac{AC}{BD}$$

(ostatnia równość wynika z równoramienności $\triangle ABC$), czyli $AE \cdot DB = AC^2$.

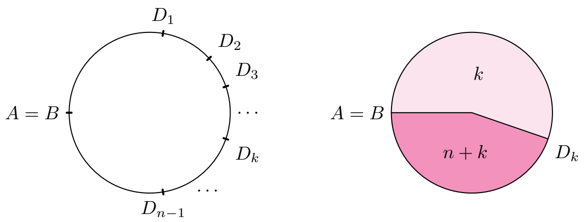
Powtórzmy teraz wielokrotnie wcześniejszą obserwację.



Niech $n \geqslant 2$ i $\alpha = \frac{180^\circ}{n+2}$. Wówczas $\sphericalangle BCA = n \cdot \alpha$. Jeśli punkty $D_0 = A$, D_1, $D_2, \ldots, D_n = B$ wybierzemy na boku AB w taki sposób, że $\sphericalangle D_k C D_{k-1} = \alpha$ dla $k = 1, \ldots, n$, to zachodzi $AD_k \cdot D_{k-1}B = AC^2$.

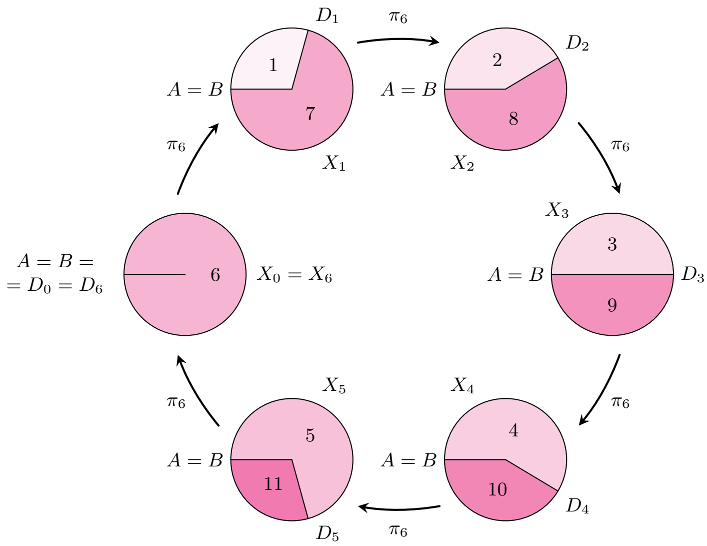
Jesteśmy gotowi, by skonstruować n przyrządów losujących, pozwalających graczowi drugiemu wygrać z prawdopodobieństwem π_n.

Konstrukcja ruletek. Nawińmy odcinek AB (czyli najdłuższy bok trójkąta) na koło o środku O i promieniu $\frac{AB}{2\pi}$ tak, by stał się on obwodem koła. Punkty $A = D_0$ oraz $B = D_n$ ulegną sklejeniu, tworząc jeden punkt, który wraz z punktami $D_1, D_2, \ldots, D_{n-1}$ dzieli obwód na n części. Punkty te, oczywiście, nie są równomiernie rozmieszczone na obwodzie, tak samo jak nie były na boku trójkąta. Przyrząd X_k (gdzie $k = 0, 1, \ldots, n$) to ruletka, którą otrzymujemy, dzieląc koło promieniami OA oraz OD_k na dwa sektory, w które wpisujemy liczby k oraz $n + k$ w sposób pokazany na rysunku.



Z lewej szablon do zbudowania n przyrządów, z prawej przyrząd X_k.

Ruletka działa w naturalny sposób – można, na przykład, zamocować w środku wskazówkę i wprawić ją w ruch, każda jej wynikowa pozycja jest tak samo prawdopodobna, a wynikiem losowania będzie liczba wpisana w pole, na którym się ona zatrzyma. Prawdopodobieństwo uzyskania wyniku k na przyrządzie X_k wynosi $\frac{AD_k}{AB}$ (stosunek długości łuków), zaś prawdopodobieństwo uzyskania wyniku $n + k$ wynosi $\frac{D_k B}{AB}$. Ruletki X_0 oraz X_n są identyczne – zwracają jedynie wynik n. Dla przykładu, dla $n = 6$ uzyskujemy następujące ruletki:



Aby obliczyć prawdopodobieństwo tego, z jakim X_{k-1} jest mniejsze od X_k, zauważmy, że X_{k-1} może przyjąć tylko wartości $k - 1$ lub $k - 1 + n$, zaś X_k tylko wartości k lub $k + n$. Zatem X_{k-1} jest mniejsze od X_k zawsze z wyjątkiem

Rozwiązanie zadania M 1571.
Wykażemy, że szukanym zbiorem jest wysokość trójkąta poprowadzona z wierzchołka B.

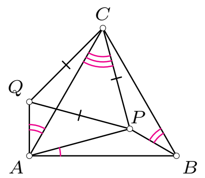
Z jednej strony, dla każdego punktu P tej wysokości mamy

$$\frac{\sphericalangle PAB + \sphericalangle PCA}{2} = \frac{\sphericalangle PCB + \sphericalangle PCA}{2} = = 30^\circ = \sphericalangle PBC.$$

Z drugiej strony, przypuśćmy, że punkt P wnętrza trójkąta równobocznego ABC jest taki, że

$$\sphericalangle PBC - \sphericalangle PAB = \sphericalangle PCA - \sphericalangle PBC.$$

Oznaczmy przez Q obraz punktu P w obrocie wokół C przeprowadzającym B na A. Wówczas trójkąt CPQ jest równoboczny.



Zauważmy, że

$$\begin{aligned}
&\sphericalangle PAQ - \sphericalangle AQP = \\
&= (60^\circ + \sphericalangle QAC - \sphericalangle PAB) - (\sphericalangle AQC - 60^\circ) = \\
&= 60^\circ + \sphericalangle PBC - \sphericalangle PAB - \sphericalangle BPC + 60^\circ = \\
&= 120^\circ + \sphericalangle PCA - \sphericalangle PBC - \sphericalangle BPC = \\
&= 120^\circ + 60^\circ - \sphericalangle PCB - \sphericalangle PBC - \sphericalangle BPC = \\
&= 180^\circ - 180^\circ = 0,
\end{aligned}$$

skąd $\sphericalangle PAQ = \sphericalangle AQP$ i $AP = QP = CP$. To oznacza, że punkt P leży na symetralnej odcinka AC, czyli na wysokości trójkąta ABC opuszczonej z B.

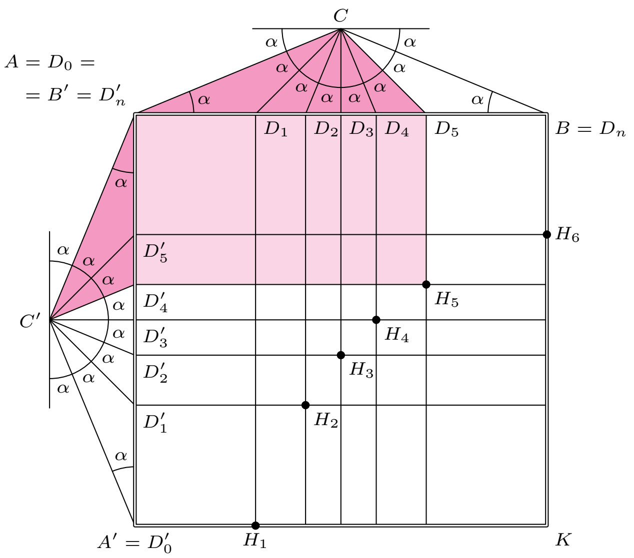
Rozwiązanie zadania F 956.
Dla daleko idącego uproszczenia przyjmijmy, że Ziemia jest ciekłą, jednorodną kulą. Korzystając z faktu, że wewnątrz jednorodnej powłoki kulistej wypadkowa siła grawitacji od całej powłoki równa się zeru, otrzymujemy, że przyspieszenie grawitacyjne γ we wnętrzu Ziemi rośnie liniowo z odległością r od jej środka: $\gamma(r) = gr/R$. Pozostaje nam obliczyć ciśnienie pochodzące od słupa cieczy o gęstości ρ i wysokości R znajdującego się w polu grawitacyjnym $\gamma(r)$:

$$p = \int_0^R \rho\gamma(r)dr = \int_0^R \rho g \tfrac{r}{R} dr = \tfrac{1}{2}\rho g R$$

(nielubiący całkowania dla otrzymania wzoru końcowego mogą posłużyć się analogią z obliczaniem prędkości średniej w ruchu jednostajnie przyspieszonym). Po podstawieniu danych liczbowych otrzymujemy $p = 1{,}8 \cdot 10^{11}\ \mathrm{N/m^2} \approx 1{,}8 \cdot 10^6$ atm. Na podstawie badań fal sejsmicznych wartość ciśnienia we wnętrzu Ziemi oceniana jest w granicach od $3{,}5 \cdot 10^6$ atm do $3{,}9 \cdot 10^6$ atm. Niedoszacowanie tej wartości w przeprowadzonym powyżej rachunku wynika z nieuwzględnienia wzrostu gęstości skał wraz ze zbliżaniem się do środka Ziemi.

sytuacji, gdy $X_k = k$ oraz $X_{k-1} = k-1+n$. Wynika stąd, że dla $k = 1, \ldots, n$

$$P(X_{k-1} < X_k) = 1 - P(X_k = k) \cdot P(X_{k-1} = k-1+n) =$$
$$= 1 - \frac{AD_k}{AB} \cdot \frac{D_{k-1}B}{AB} = 1 - \frac{AC^2}{AB^2} =$$
$$= 1 - \frac{1}{4 \cdot \left(\frac{AB/2}{AC}\right)^2} = 1 - \frac{1}{4\cos^2\alpha} = \pi_n.$$



Zauważmy, że $\triangle ACD_5$ oraz $\triangle B'C'D'_4$ są podobne (ogólniej, podobne są $\triangle ACD_k$ oraz $\triangle B'C'D'_{k-1}$).

Na kolejnym rysunku zilustrowane są obliczenia dla $n = 6$ oraz przyrządów X_4 i X_5. Odcinek AB nawijamy na ruletkę X_4 (trójkąt z lewej) i X_5 (trójkąt nad kwadratem) w pokazany sposób. Zaznaczamy odpowiednie sektory.

Prawdopodobieństwo $P(X_4 \geqslant X_5) = 1 - P(X_4 < X_5)$ jest równe stosunkowi pól zacieniowanego prostokąta i kwadratu $AA'KB$. Ponieważ trójkąty ACD_k i $B'C'D'_{k-1}$ są podobne, to stosunek ten dla dowolnych ruletek X_{k-1}, X_k i dowolnego $n \geqslant 2$ wynosi

$$\frac{AD_k \cdot D'_{k-1}B'}{AB \cdot A'B'} = \frac{AC \cdot AC'}{AB \cdot A'B'} = \frac{1}{4\cos^2\alpha}.$$

Wszystkie prostokąty $AD'_{k-1}H_kD_k$ mają takie samo pole równe AC^2. Punkty $H_1, \ldots, H_n$ leżą na jednej hiperboli. Wykazaliśmy, jak zbudować n przyrządów realizujących szansę π_n na wygraną drugiego gracza.

Dlaczego nie można uzyskać więcej niż π_n? Załóżmy, że $Y_1, \ldots, Y_n$ są takimi niezależnymi zmiennymi losowymi, że $P(Y_{k-1} < Y_k) > \pi_n$ dla wszystkich $k = 1, \ldots, n$ (gdzie $Y_0 = Y_n$). Okazuje się (dowód tego faktu nie jest łatwy), że modyfikując odpowiednio nasze zmienne losowe, można założyć, że Y_n jest stała (tak, jak w przypadku kostki B w zestawie Efrona oraz ruletki X_n). Określmy liczby $y_0, y_1, \ldots, y_n$ następująco: niech y_k będzie takie, że $P(Y_k \leqslant y_k) \geqslant \frac{AD_k}{AB}$ oraz $P(Y_k \geqslant y_k) \geqslant 1 - \frac{AD_k}{AB} = \frac{D_kB}{AB}$ (taka liczba y_k to kwantyl rzędu $\frac{AD_k}{AB}$ rozkładu zmiennej losowej Y_k). Ponieważ $Y_0 = Y_n$ jest stała, więc można liczby y_0 oraz y_n określić tak, by $y_0 = y_n$. Niech y_j będzie najmniejszą spośród liczb $y_1, \ldots, y_n$. Wówczas $y_{j-1} \geqslant y_j$. Wynika stąd, że jeśli $Y_j \leqslant y_j$ oraz $Y_{j-1} \geqslant y_{j-1}$, to $Y_{j-1} \geqslant Y_j$. Zatem

$$P(Y_{j-1} < Y_j) \leqslant 1 - P(Y_j \leqslant y_j, Y_{j-1} \geqslant y_{j-1}) \leqslant$$
$$\leqslant 1 - \frac{AD_j}{AB} \cdot \frac{D_{j-1}B}{AB} = 1 - \frac{1}{4\cos^2\frac{180^\circ}{n+2}} = \pi_n.$$

Otrzymaliśmy sprzeczność. Oznacza to, że takie zmienne losowe nie istnieją.

Ponieważ ciąg (π_n) jest rosnący i zbieżny do $\frac{3}{4}$, więc prawdopodobieństwo zwycięstwa drugiego gracza jest zawsze mniejsze niż $\frac{3}{4}$.

Motywacją do napisania artykułu była praca Małgorzaty Róg *Paradoks pierwszeństwa, czyli gry zaprzeczające intuicjom o prawdopodobieństwie* (V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie) napisana na 39. Konkurs Uczniowskich Prac z Matematyki im. Pawła Domańskiego.

Zauważmy, że $\pi_4 = 1 - \frac{1}{4\cos^2 30^\circ} = \frac{2}{3}$, czyli kostki Efrona stanowią optymalny przykład dla $n = 4$. W ciągu π_n, oprócz π_4, tylko $\pi_2 = \frac{1}{2}$ jest liczbą wymierną (wtedy gra nie ma większego sensu, ale takie kostki bez problemu można wskazać). Pozostałe wartości są niewymierne, więc nie można ich zrealizować za pomocą kostek (nawet takich, które mają inną niż 6 liczbę ścian).
Na przykład $\pi_3 = 1 - \frac{1}{4\cos^2 36^\circ} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{1}{\phi} = \phi - 1$ jest stosunkiem długości krótszej do dłuższej części w złotym podziale odcinka (ϕ to złota proporcja), $\pi_6 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\pi_8 = \frac{\phi}{\sqrt{5}}$, zaś $\pi_{10} = \sqrt{3} - 1$. Jeszcze inne szczególne wartości π_n to $\pi_{2^n-2} = 1 - \frac{1}{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}$ dla $n \geqslant 2$ (mamy tu $n-1$ dwójek oraz $n-2$ pierwiastki) oraz $\pi_{3\cdot 2^n-2} = 1 - \frac{1}{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{3}}}$ (tym razem $n \geqslant 1$ i mamy $n-1$ dwójek, jedną trójkę oraz $n-1$ pierwiastków).

Opisany problem nieprzechodniości kojarzony jest z Martinem Gardnerem i Bradleyem Efronem. Jednak pierwszymi badaczami tego zjawiska byli polscy matematycy Hugo Steinhaus i Stanisław Trybuła, którzy wyniki w tej materii uzyskali w 1959 roku.