Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

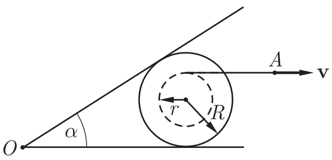
Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przesyłać również pocztą elektroniczną pod adresem `delta@mimuw.edu.pl` (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 3/2018

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

Przypominamy treść zadań:

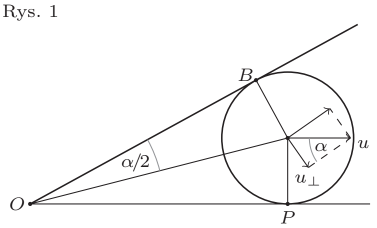
654. Na szpulę o promieniu wewnętrznym r i zewnętrznym R nawinięta jest linka (rys. 1). Koniec A linki ciągnięty jest poziomo z prędkością v. Na szpuli opiera się deska, która może obracać się wokół poziomej osi prostopadłej do płaszczyzny rysunku, przechodzącej przez punkt O. Szpula toczy się bez poślizgu po powierzchni poziomej. Jaka jest prędkość kątowa deski, gdy tworzy ona z poziomem kąt α?



Rys. 1

655. Ciężarek o masie m wisi na nici. Na jaką najmniejszą wysokość należy podnieść ciężarek, aby spadając, rozerwał nić? Minimalna siła wystarczająca do rozerwania nici wynosi Mg (g jest przyspieszeniem ziemskim) i przed rozerwaniem wydłuża ją o a. Zakładamy, że siła naprężenia nici jest proporcjonalna do jej wydłużenia aż do zerwania.

654. Toczenie bez poślizgu możemy opisać jako czysty obrót wokół chwilowej osi przechodzącej przez punkt styczności z podłożem P (rys. 2), stąd prędkość kątowa ruchu obrotowego szpuli dana jest wzorem $\omega = \frac{v}{R+r}$, a jej prędkość ruchu postępowego wynosi $u = \omega R = \frac{vR}{R+r}$. Prędkość punktu B styczności szpuli z deską w chwili, gdy deska tworzy z poziomem kąt α, ma składową prostopadłą do deski $u_\perp = u \sin\alpha$ (prędkość ruchu obrotowego jest prostopadła do deski). Odległość punktu B od osi obrotu deski wynosi $l = \frac{R}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$. Szukana prędkość kątowa deski dana jest wzorem



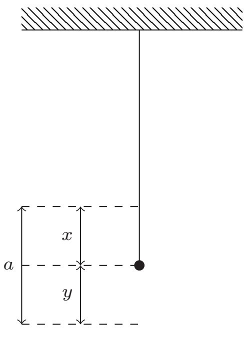
Rys. 2

$$\omega_D = \frac{u_\perp}{l} = \frac{2v\sin^2\frac{\alpha}{2}}{R+r}.$$

655. Nić nie ulega zerwaniu, gdy ciężarek wisi na niej w stanie równowagi, zatem spełniony jest warunek: $m < M$. Oznaczmy przez x wydłużenie nici w stanie równowagi (rys. 3), mamy wtedy związki:

$$a = \frac{Mg}{k}, \qquad x = \frac{mg}{k} = \frac{am}{M},$$

gdzie k jest współczynnikiem sprężystości nici. Dodatkowe wydłużenie w momencie rozerwania nici wynosi $y = a - x$. Musimy rozważyć dwa przypadki:



Rys. 3

1. Gdy $y \leqslant x, a \leqslant 2x, m \geqslant \frac{M}{2}$, na ciężarek cały czas działa siła sprężystości i aż do momentu zerwania nici porusza się on ruchem harmonicznym. Najmniejsza wysokość, na jaką musimy go podnieść, wynosi $h = y = a\left(1 - \frac{m}{M}\right)$.
2. Gdy $y > x$, $m < \frac{M}{2}$, możemy skorzystać z zasady zachowania energii: $mg\,(h+y) = \frac{ka^2}{2}$.

Ostatecznie szukana wysokość dana jest wzorem

$$h = \begin{cases} a\left(1 - \dfrac{m}{M}\right), & \text{gdy } \dfrac{M}{2} \leqslant m < M,\\[2mm] \dfrac{a\left(M^2 - 2mM + 2m^2\right)}{2mM}, & \text{gdy } m < \dfrac{M}{2}. \end{cases}$$

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 646 ($WT = 2{,}75$), 647 ($WT = 3{,}95$), 648 ($WT = 2{,}71$), 649 ($WT = 2{,}67$) z numerów 11 i 12/2017

Tomasz Rudny	Poznań	39,04
Marian Łupieżowiec	Gliwice	38,86
Tomasz Wietecha	Tarnów	36,14
Jacek Konieczny	Poznań	29,80
Ryszard Woźniak	Kraków	28,77
Krzysztof Magiera	Łosiów	28,70
Karol Łukanowski	Niemcz	23,89
Aleksander Surma	Myszków	18,61

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 3/2018

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 751 ($WT = 3{,}77$) i 752 ($WT = 1{,}26$) z numeru 12/2017

Marcin Kasperski	Warszawa	45,09
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	39,86
Tomasz Choczewski	Szczecin	36,09
Michał Koźlik	Gliwice	32,23
Michał Miodek	Warszawa	31,56

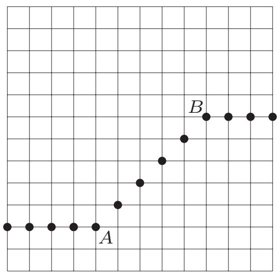
Nie tak wielu Weteranów przekroczyło *44* więcej niż trzy razy (do tej pory – dwudziestka). Marcin Kasperski oto dołączył do ich grona.

Przypominamy treść zadań:

757. Funkcje $f, g\colon \{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,n\}$ są określone wzorami
$$f(k) = \max\{1,\ k-1\}, \qquad g(k) = \min\{n,\ k+1\}.$$
Dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ ustalić, ile jest funkcji $h\colon \{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,n\}$, dających się wyrazić jako złożenia skończenie wielu odwzorowań, z których każde jest jedną z funkcji f, g. [Dopuszczamy również złożenie puste (zero egzemplarzy funkcji f, g), przyjmując zwykłą umowę, że daje ono w wyniku odwzorowanie tożsamościowe $h(k) = k$.]

758. Trzy okręgi o promieniach r_1, r_2, r_3 są parami styczne zewnętrznie oraz są styczne wewnętrznie do okręgu o promieniu R. Wykazać, że
$$r_1 + r_2 + r_3 + 2\sqrt{r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1} \leqslant 3R.$$

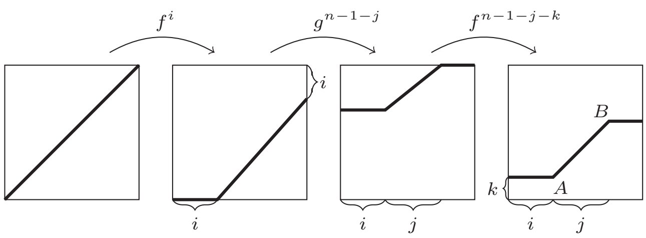
757. Funkcja jest reprezentowana przez jej wykres – w tym przypadku układ n kropek na „planszy”
$$K = \{(x,y)\colon\ \ 1 \leqslant x \leqslant n,\ \ 1 \leqslant y \leqslant n;\quad x, y \in \mathbb{N}\}$$
(to zbiór punktów kratowych w kwadracie $[1,n] \times [1,n]$), po jednej kropce na każdej linii pionowej. Stosując do takiego układu funkcję f, uzyskujemy przesunięcie wszystkich kropek o jednostkę w dół, z wyjątkiem tych, które już były na dolnej krawędzi; one nie zmieniają położenia. Działanie funkcji g jest podobne (ruch w górę; blokada na górnej krawędzi).



Rys. 1

Niech A, B będą dwoma różnymi punktami zbioru K takimi, że odcinek AB jest równoległy do przekątnej kwadratu, przy czym punkt B leży na prawo i w górę od A. Dla takiej pary punktów niech h_{AB} oznacza funkcję, której wykres składa się z punktów kratowych, położonych na odcinku poziomym od lewego skraja planszy do A, na odcinku AB, i na odcinku od B do prawego skraja planszy (rysunek 1). Złożenie takiej funkcji z dowolną z operacji f, g daje w wyniku znów funkcję takiej postaci lub funkcję stałą (o wykresie: wszystkie kropki na krawędzi górnej lub dolnej). Złożenie funkcji stałej z f lub g daje oczywiście także funkcję stałą.

Wniosek: startując od odwzorowania tożsamościowego i stosując skończenie wiele razy operacje f, g (w dowolnej kolejności) możemy uzyskać tylko funkcje typu h_{AB} oraz funkcje stałe. Co ważne, *każdą* taką funkcję da się w ten sposób uzyskać (przykładową ewolucję przedstawia rysunek 2).



Rys. 2

Pozostaje zliczyć funkcje h_{AB} – czyli możliwe pary punktów A, B – oraz doliczyć funkcje stałe. Punkty A, B mogą leżeć na przekątnej $x = y$ (przechodzącej przez n punktów kratowych), na jednej z dwóch linii $|x-y| = 1$ (po $n{-}1$ punktów kratowych), na jednej z dwóch linii $|x-y| = 2$ (po $n{-}2$ punktów kratowych), itd. Liczba możliwych do uzyskania funkcji (więc n funkcji stałych oraz wszystkich funkcji h_{AB}) wynosi zatem
$$n + \binom{n}{2} + 2\left[\binom{n-1}{2} + \binom{n-2}{2} + \ldots + \binom{2}{2}\right] =$$
$$= n + \binom{n}{2} + 2\binom{n}{3} = \frac{n(2n^2 - 3n + 7)}{6}.$$

758. Oznaczmy (kolejno) przez S_1, S_2, S_3 środki tych trzech okręgów, a środek dużego okręgu przez O. Zgodnie z warunkami zadania,

(1) $\quad |S_iS_j| = r_i + r_j,\ \ |OS_i| = R - r_i$ dla $\ i, j \in \{1,2,3\}$.

Niech P będzie środkiem ciężkości trójkąta $S_1S_2S_3$. Jest to punkt minimalizujący sumę kwadratów odległości od wierzchołków (znany fakt, zresztą łatwy do wykazania). Zatem
$$(2) \qquad \sum |OS_i|^2 \geqslant \sum |PS_i|^2 = \sum\left(\frac{2}{3}\,m_i\right)^2$$
(sumy po $\ i = 1,2,3$),

gdzie m_i jest długością środkowej, wychodzącej z wierzchołka S_i. Suma kwadratów długości środkowych to $3/4$ sumy kwadratów długości boków (kolejny znany wzór). Nierówność (2) pokazuje więc, że
$$3\sum |OS_i|^2 \geqslant \frac{4}{3}\sum m_i^2 = \sum |S_iS_{i+1}|^2.$$
Wprowadzamy dane (1) i przekształcamy uzyskaną nierówność:
$$3\sum (R - r_i)^2 \geqslant \sum (r_i + r_{i+1})^2;$$
$$9R^2 - 6R\sum r_i + 3\sum r_i^2 \geqslant 2\sum r_i^2 + 2\sum r_ir_{i+1}\,;$$
$$9R^2 - 6R\sum r_i + \Big(\sum r_i\Big)^2 \geqslant 4\sum r_ir_{i+1}\,;$$
$$\Big(3R - \sum r_i\Big)^2 \geqslant 4\sum r_ir_{i+1}\,.$$
Różnica w nawiasie jest dodatnia. Pierwiastkując stronami ostatnią nierówność, dostajemy tezę zadania.