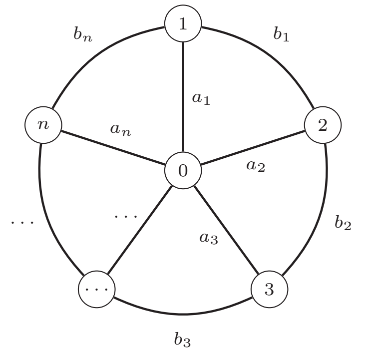
Informatyczny kącik olimpijski (116): Bajtockie kółeczko

Tym razem omówimy zadanie *Bajtockie kółeczko* z pierwszego etapu zawodów drużynowych X Olimpiady Informatycznej Gimnazjalistów.

Bajtockie kółeczko: *W Bajtocji znajduje się $n+1$ miast (ponumerowanych kolejnymi liczbami naturalnymi od 0 do n) oraz $2n$ dróg pomiędzy nimi. Miasta o numerach z przedziału $[1;n]$ znajdują się na okręgu, zaś miasto o numerze 0 (stolica) jest środkiem tego okręgu. Pomiędzy każdym miastem na okręgu oraz stolicą istnieje dwukierunkowe połączenie (a_i oznacza czas przejazdu pomiędzy stolicą a i-tym miastem). Dodatkowo, pomiędzy każdymi dwoma sąsiednimi miastami na okręgu istnieje dwukierunkowe połączenie (b_i oznacza czas przejazdu pomiędzy i-tym miastem a miastem sąsiadującym z prawej strony). Naszym zadaniem jest zaplanowanie podróży po Bajtocji. W tym celu musimy wybrać miasto, z którego wyruszymy oraz miasta, które odwiedzimy. Podróż musi zaczynać się i kończyć w tym samym mieście. Każda droga oraz każde miasto (poza miastem, w którym zaczynamy i kończymy podróż) może zostać odwiedzone co najwyżej raz. Ile czasu potrwa najdłuższa taka podróż?*



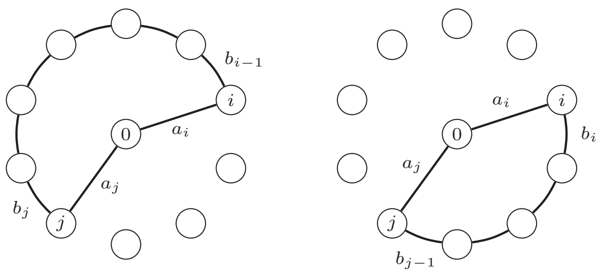
Naszym zadaniem, w terminologii grafowej, jest znalezienie cyklu o największej sumie wag krawędzi. Rozważmy dwa przypadki:

- do cyklu nie należy wierzchołek 0 – wówczas mamy tylko jedną możliwość wyboru cyklu, którego suma wag krawędzi wynosi: $b_1 + b_2 + \ldots, b_n$;
- do cyklu należy wierzchołek 0 – ten przypadek zostanie dokładnie opisany w dalszej części rozwiązania.

Rozwiązanie $O(n^3)$

Rozważamy przypadek, kiedy stolica należy do cyklu. W tym przypadku dokładnie dwie krawędzie incydentne ze stolicą należą do cyklu. Zauważmy, że dla ustalonych krawędzi incydentnych ze stolicą łatwo znaleźć najdłuższy cykl. Załóżmy, że do cyklu należą krawędzie: $(0,i)$ oraz $(0,j)$ dla $i,j \in [1;n]$ i $i<j$. Wówczas istnieją dokładnie dwa cykle zawierające obie te krawędzi:

- C_l – zakładamy, że od i-tego wierzchołka poruszamy się w lewo,
- C_p – zakładamy, że od i-tego wierzchołka poruszamy się w prawo.



po lewej C_l, po prawej C_p

Suma wag krawędzi cyklu C_l wynosi:

$$W_l = a_i + b_{i-1} + \ldots + b_1 + b_n + \ldots + b_j + a_j,$$

zaś suma wag krawędzi cyklu C_p wynosi:

$$W_p = a_i + b_i + \ldots + b_{j-1} + a_j.$$

Zatem dla ustalonych krawędzi incydentnych ze stolicą (krawędzi do wierzchołków i oraz j) wynikiem jest $\max(W_l, W_p)$.

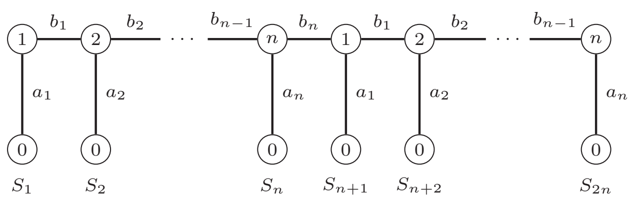
Aby znaleźć cykl o największej sumie wag krawędzi, wystarczy rozpatrzyć każdą parę krawędzi incydentnych ze stolicą. Dla każdej takiej pary należy obliczyć wynik i spośród otrzymanych wyników wybrać maksimum. W ten sposób otrzymujemy rozwiązanie, które działa w czasie $O(n^3)$.

Rozwiązanie $O(n^2)$

Zauważmy, że możemy w czasie stałym obliczać sumę wag krawędzi na spójnym fragmencie obwodu przy wykorzystaniu sum prefiksowych. Wówczas otrzymujemy rozwiązanie, które działa w czasie $O(n^2)$.

Rozwiązanie $O(n \cdot \log(n))$

Ustawmy wierzchołki, które znajdują się na obwodzie, w ciąg (jeden za drugim) oraz zduplikujmy otrzymany ciąg.



Niech S_i oznacza odległość od wierzchołka numer 1 do kolejnych kopii stolicy, dokładnie:

$$S_i = \begin{cases} a_i + \sum_{j=1}^{i-1} b_j & \text{dla } 1 \leqslant i \leqslant n, \\ a_{i-n} + \sum_{j=1}^{n} b_j + \sum_{j=1}^{i-1-n} b_j & \text{dla } n < i \leqslant 2n. \end{cases}$$

Dla każdego całkowitego $i \in [1;n]$ znajdujemy najdłuższy cykl, który zawiera krawędź $(0,i)$. Zauważmy, że długość tego cyklu wynosi: $S_j - S_i + a_i$, dla takiego największego S_j, że $j \in [i+1; i+n-1]$. Znalezienie największej takiej wartości w ciągu S można zrealizować drzewem przedziałowym (dlaczego?). Spośród wyników obliczonych dla każdego $i \in [1;n]$ wybieramy największy. W ten sposób otrzymujemy rozwiązanie, które działa w czasie $O(n \cdot \log(n))$.

Bartosz ŁUKASIEWICZ