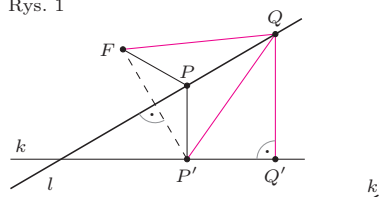
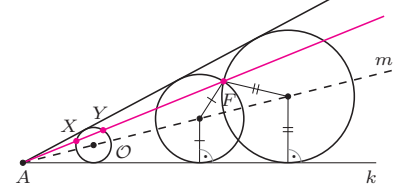


Rys. 1

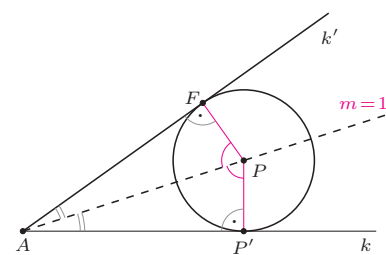


Rys. 2

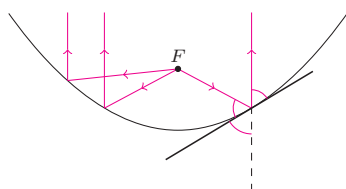


Rys. 3.  $\mathcal{O}$  – dowolnie wybrany okrąg

Dla  $m \perp k$  na mocy faktu istnieją punkty paraboli po obu stronach  $m$ , więc  $m$  nie jest styczną. Dla  $m \parallel k$  i  $P$  nie na osi symetrii istnieje drugi punkt paraboli na  $m$ , czyli  $m$  też nie jest styczną. Dla  $m \parallel k$  i  $P$  na osi symetrii dowód jest analogiczny do opisanego ( $m = l$ ).



Rys. 4



Rys. 5

**Parabola** to zbiór punktów płaszczyzny równo odległych od ustalonego punktu  $F$ , zwanego *ogniskiem*, i od ustalonej nieprzechodzącej przez  $F$  prostej  $k$ , zwanej *kierownicą* (rys. 1). Z definicji tej wynika, że parabola ma oś symetrii przechodzącą przez ognisko i prostopadłą do kierownicy oraz że wszystkie punkty paraboli leżą w tej półpłaszczyźnie wyznaczonej przez kierownicę, do której należy ognisko.

**Styczna** do paraboli to taka prosta, która ma z nią dokładnie jeden punkt wspólny, a wszystkie inne punkty paraboli znajdują się po jednej stronie tej prostej.

**Fakt.** Każdy punkt  $P'$  z kierownicy jest rzutem dokładnie jednego punktu  $P$  paraboli (należącego do symetralnej odcinka  $FP'$ , wówczas  $PF = PP'$ ).

Rozważmy dowolny punkt  $P$  paraboli, jego rzut  $P'$  na kierownicę  $k$  oraz prostą  $l$  zawierającą dwusieczną kąta  $FPP'$  (rys. 1). Z definicji paraboli  $PF = PP'$ , więc prosta  $l$  jest też symetralną odcinka  $FP'$ . Wykażemy, że  $l$  jest styczną.

**Twierdzenie 1.** Prosta  $l$  nie ma z parabolą punktów wspólnych innych niż  $P$ .

**Dowód.** Przypuśćmy, że do prostej  $l$  należy jeszcze jakiś punkt paraboli  $Q \neq P$ , niech  $Q'$  będzie jego rzutem na  $k$  (rys. 2). Wówczas  $QF = QQ'$ , bo  $Q$  leży na symetralnej  $l$  odcinka  $FP'$ , a także  $QF = QQ'$ , bo  $Q$  należy do paraboli. Zatem  $QP' = QQ'$ , czyli  $P' = Q'$ , sprzecznie z faktem powyżej.  $\square$

**Twierdzenie 2.** Punkty paraboli inne niż  $P$  leżą po tej stronie  $l$ , co ognisko  $F$ .

**Dowód.** Przypuśćmy, że jakiś punkt  $Q$  paraboli leży po przeciwnej stronie  $l$  niż  $F$ , niech  $Q'$  będzie jego rzutem na  $k$ . Wówczas, kolejno z własności symetralnej i rzutu, uzyskujemy  $QF > QQ' \geq Q'Q$ , sprzecznie z definicją paraboli.  $\square$

**Twierdzenie 3.** Prosta  $l$  jest *jedyną* styczną do paraboli w punkcie  $P$ .

**Dowód.** Rozważmy prostą  $m$  przez  $P$  dla  $m \not\perp k$  oraz  $m \not\parallel k$ . Niech  $k'$  – obraz  $k$  w symetrii względem  $m$ . Oznaczmy przez  $\alpha$  ten z kątów utworzonych przez  $k$  i  $k'$ , który zawiera  $P$  ( $m$  jest jego dwusieczną), wierzchołek  $\alpha$  nazwijmy  $A$ .

Wtedy  $P$  leży na dwusiecznej  $\alpha$  i  $PF = PP'$ , więc  $F$  nie może leżeć na zewnątrz  $\alpha$ .

Jeśli  $F$  leży wewnątrz  $\alpha$ , to półprosta  $AF \rightarrow$  przecina okrąg  $\mathcal{O}$  wpisany w kąt  $\alpha$  w dwóch punktach  $X$  i  $Y$  (rys. 3). Jednokładności o środku  $A$  przekształcające  $X$  na  $F$  i  $Y$  na  $F$  przeprowadzają  $\mathcal{O}$  na dwa różne okręgi wpisane w  $\alpha$  i przechodzące przez  $F$ . Ich środki leżą na  $m$  i są tak samo odległe od  $F$  jak od  $k$ , więc leżą też na paraboli. Wobec tego  $m$  nie jest do niej styczna.

Jeśli  $F$  leży na  $k'$ , to istnieje jedyny okrąg wpisany w  $\alpha$ , przechodzący przez  $F$ , więc jego środek  $P$  to jedyny punkt  $m$  należący do paraboli. Wówczas  $m$  zawiera dwusieczną kąta  $FPP'$  (rys. 4), czyli  $m = l$ , co kończy dowód.  $\square$

**Wniosek.** Z równości kątów przy dwusiecznej  $l$  (rys. 5) wynika, iż promienie światła wychodzące z ogniska i odbijające się od lustrzanej paraboli wedle reguły *kąt padania równy jest kątowi odbicia* wędrują dalej jako wiązka równoległa do osi symetrii. Również na odwrót, wiązka promieni równoległych do osi symetrii po odbiciu skupia się w ognisku. Tak samo jest dla trójwymiarowej *paraboloidy* otrzymanej przez obrócenie paraboli wokół jej osi symetrii.

**Korzystając z opisaney własności** rozpala się ogień olimpijski (ilustracja 3 na tylnej okładce), gotuje (9) i topi metale w temperaturze  $3500^\circ\text{C}$  (2). Kształt wycinka paraboloidy mają anteny satelitarne, mogą one być ustawiane pionowo, a ognisko nie musi być nad środkiem talerza (4). Są też teleskopy z płynnym lustrem z rtęci, przybierającym kształt paraboloidy wskutek kręcenia się ze stałą prędkością wokół swej osi – te z kolei mogą być tylko skierowane w górę (5). Własności paraboloid stosuje się w mikrofonach szpiegowskich i ornitologicznych (1), konstrukcje o zbliżonym kształcie służyły też w Anglii w czasie I Wojny Światowej do nasłuchiwania, czy nadlatują niemieckie sterowce z bombami (7). Dwa paraboloidalne talerze ustawione naprzeciw siebie umożliwiają szeptanie na odległość (6). Na podobnej zasadzie powstaje iluzja monety leżącej na górze „ufo” (10) – w rzeczywistości moneta ta leży na dnie paraboloidalnej lustrzanej miseczki (8).

Dziękuję Jerzemu Bednarczukowi za pomoc w przygotowaniu tego artykułu.