Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przesyłać również pocztą elektroniczną pod adresem `delta@mimuw.edu.pl` (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VIII 2018

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 749 ($WT = 3{,}05$) i 750 ($WT = 1{,}49$) z numeru 11/2017

Roksana Słowik	Knurów	44,30
Marcin Kasperski	Warszawa	43,83
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	39,86
Tomasz Choczewski	Szczecin	34.83
Michał Koźlik	Gliwice	32,23

Niewiele Pań bierze udział w naszej Lidze – co zauważamy z nieukrywanym żalem. Od startu Ligi tylko pięć uczestniczek przekroczyło próg 44 p. Pani Roksana Słowik jest jedyną, która tę barierę pokonała dwukrotnie!

Zadania z matematyki nr 763, 764

Redaguje Marcin E. KUCZMA

763. Dany jest wielomian $P(x)$ stopnia 2, o współczynnikach rzeczywistych, oraz liczba naturalna $n \geqslant 1$. Udowodnić, że może istnieć co najwyżej jeden wielomian $Q(x)$ stopnia n, spełniający równanie $P(Q(x)) = Q(P(x))$ dla $x \in \mathbb{R}$.

764. Czy istnieją liczby naturalne $a, b \geqslant 1$, względnie pierwsze i takie, że wzór rekurencyjny

$$x_1 = a, \qquad x_{n+1} = b + \prod_{k=1}^{n} x_k$$

generuje ciąg $x_1, x_2, x_3, \ldots$, którego wszystkie wyrazy są liczbami złożonymi?

Zadanie 764 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Rozwiązania zadań z numeru 2/2018

Przypominamy treść zadań:

755. Niech $P(x)$ będzie takim wielomianem o współczynnikach rzeczywistych, że

$$P(x) + P''(x) \geqslant 2P'(x) \quad \text{dla} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Dowieść, że $P(x) \geqslant 0$ dla $x \in \mathbb{R}$.

756. Dana jest liczba całkowita $n \geqslant 2$. Wykazać, że dla każdego układu dodatnich liczb całkowitych $a_1, \ldots, a_n$ zachodzi nierówność

$$\mathrm{NWD}(a_1, \ldots, a_n) \cdot \mathrm{NWW}(a_1, \ldots, a_n) \leqslant a_1 \cdot \ldots \cdot a_n.$$

Scharakteryzować (dla ustalonego n) te układy $a_1, \ldots, a_n$ (dodatnich liczb całkowitych), dla których napisana nierówność staje się równością.

755. Gdy $P(x)$ jest funkcją stałą, implikacja jest oczywista. Dalej przyjmijmy, że P jest wielomianem stopnia dodatniego. Wielomian $P - 2P' + P''$ ma taki sam stopień, a przy tym przyjmuje – zgodnie z założeniem – wyłącznie wartości nieujemne. Jest to więc wielomian stopnia parzystego. Ten sam stopień ma zarówno wielomian P, jak i wielomian $Q(x) = P(x) - P'(x)$. Każdy z tych wielomianów, jako funkcja ciągła zmiennej rzeczywistej, mająca granicę ∞ przy $|x| \to \infty$, przyjmuje w pewnym punkcie osi liczbowej swoją wartość minimalną. Niech więc

$$\min_{x\in\mathbb{R}} P(x) = P(a), \qquad \min_{x\in\mathbb{R}} Q(x) = Q(b); \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

W punkcie, realizującym minimum, pochodna jest równa zeru: $P'(a) = 0$, $Q'(b) = 0$. Zauważmy, że, w myśl założenia zadania,

$$Q(x) - Q'(x) = \big(P(x) - P'(x)\big) - \big(P'(x) - P''(x)\big) \geqslant 0 \text{ dla } x \in \mathbb{R}.$$

Podstawiając $x = b$ dostajemy $Q(b) \geqslant 0$. Jest to wartość minimalna wielomianu Q, zatem

$$Q(x) = P(x) - P'(x) \geqslant 0 \quad \text{dla wszystkich} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Podstawiamy $x = a$ i mamy $P(a) \geqslant 0$. To wartość minimalna wielomianu P. Zatem $P(x) \geqslant 0$ dla $x \in \mathbb{R}$.

756. Przyjmijmy oznaczenia: $m = \mathrm{NWD}(a_1, \ldots, a_n)$, $M = \mathrm{NWW}(a_1, \ldots, a_n)$, $P = a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$. Wystarczy wykazać, że każda liczba pierwsza, która dzieli iloczyn mM, wchodzi do iloczynu P w co najmniej takiej samej potędze. Niech więc p będzie liczbą pierwszą i niech (dla $i = 1, \ldots, n$) k_i będzie takim wykładnikiem, że $p^{k_i} \| a_i$ (ten napis oznacza, że a_i dzieli się przez p^{k_i}, ale nie przez p^{k_i+1}). Wówczas $p^{\alpha} \| m$, $p^{\beta} \| M$, gdzie $\alpha = \min\{k_1, \ldots, k_n\}$, $\beta = \max\{k_1, \ldots, k_n\}$, i wobec tego $p^{\alpha+\beta} \| mM$. Oczywiście $p^{k_1+\ldots+k_n} \| P$. Porównanie wykładników nie pozostawia wątpliwości:

$$(1) \qquad \min\{k_1, \ldots, k_n\} + \max\{k_1, \ldots, k_n\} \leqslant k_1 + \ldots + k_n.$$

Wobec dowolności wyboru p, uzasadnia to zadaną nierówność $mM \leqslant P$.

Kiedy zachodzi równość $mM = P$? Wtedy, gdy każda liczba pierwsza dzieli mM w dokładnie tej samej potędze, w jakiej dzieli P. Czyli gdy dla każdej liczby pierwszej p nierówność (1) (z wykładnikami k_i, wyznaczonymi przez p) staje się równością.

Dla $n = 2$ jest tak zawsze; dostajemy znaną tożsamość: $\mathrm{NWD}(a, b) \cdot \mathrm{NWW}(a, b) = ab$.

Dla $n \geqslant 3$ równość w relacji (1) oznacza, że gdy po jej prawej stronie usuniemy jeden największy i jeden najmniejszy składnik, pozostaną jakieś nieskreślone składniki, o zerowej sumie – czyli wszystkie równe zeru. Składnik najmniejszy automatycznie także jest zerem. Tylko jeden składnik po prawej stronie (1) może być dodatni. To znaczy, że tylko jedna z liczb $a_1, \ldots, a_n$ może dzielić się przez p. Wobec dowolności p, znaczy to, że liczby $a_1, \ldots, a_n$ są parami względnie pierwsze.

I na odwrót, gdy tak jest, wówczas dla każdej liczby pierwszej p mamy w ciągu $(k_1, \ldots, k_n)$ co najwyżej jeden wyraz niezerowy; nierównść (1) przechodzi w równość, i w konsekwencji $mM = P$.

Podsumowując: dla $n \geqslant 3$, równość $mM = P$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy liczby $a_1, \ldots, a_n$ są parami względnie pierwsze; dla $n = 2$, ta równość jest tożsamością.

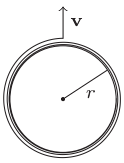
Zadania z fizyki nr 660, 661

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

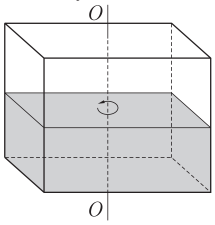
Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VIII 2018

660. Soczewka płaskowypukła wykonana jest ze szkła o współczynniku załamania $n = 1{,}6$. Promień powierzchni wypukłej wynosi $R = 10$ cm, grubość soczewki $d = 0{,}2$ cm. Na powierzchnię płaską soczewki pada równolegle do jej osi optycznej wiązka światła. Gdy odsłonięta jest tylko niewielka część soczewki wokół osi optycznej, promienie ogniskują się na ekranie. Znaleźć średnicę plamki na ekranie po odsłonięciu całej soczewki.

661. Podstawa walca przytwierdzona jest do gładkiej powierzchni poziomej. Nitkę przymocowano jednym końcem do powierzchni bocznej walca przy jego podstawie o promieniu r i owinięto wokół walca k razy (k jest liczbą całkowitą). Do swobodnego końca nitki przyczepiono kulkę i nadano jej prędkość $\mathbf{v}$ skierowaną wzdłuż promienia walca (rys. 1). Po jakim czasie cała nitka ponownie nawinie się na walec?



Rys. 1



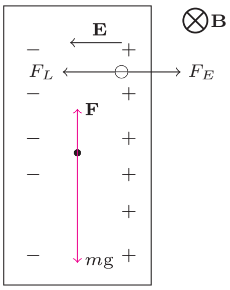
Rys. 2

Rozwiązania zadań z numeru 2/2018

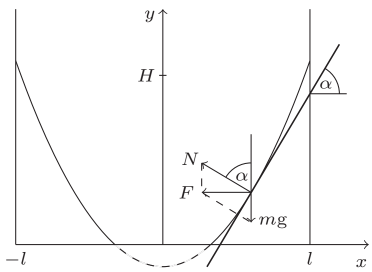
Przypominamy treść zadań:

652. Znaleźć przyspieszenie, z jakim spada pionowo w dół okrągła metalowa płytka o masie m w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji B, równoległym do powierzchni Ziemi. Płaszczyzna płytki jest równoległa do linii pola magnetycznego i prostopadła do powierzchni Ziemi. Grubość płytki d jest dużo mniejsza od jej promienia R, przyspieszenie ziemskie ma wartość g.

653. Do wąskiego, prostopadłościennego naczynia nalano pewną ilość cieczy (rys. 2). Następnie naczynie zaczęto obracać wokół pionowej osi symetrii. Przy pewnej prędkości kątowej odsłonięta została k-ta część powierzchni dna. Jak zmieniła się w wyniku tego siła parcia na dno i wąskie ścianki boczne (w porównaniu z przypadkiem nieruchomego naczynia)? Ciecz nie wylewa się z naczynia. Napięcie powierzchniowe można zaniedbać.



Rys. 3



Rys. 4

652. Na początku rozważmy przypadek, gdy płytka porusza się pionowo w dół ze stałą prędkością v. Na swobodne elektrony w płytce działa w polu magnetycznym siła Lorentza (rys. 3) $F_L = evB$, gdzie e jest wartością bezwzględną ładunku elektronu. W wyniku tego elektrony przemieszczają się na lewą stronę płytki. Powoduje to powstanie pola elektrycznego E skierowanego jak na rysunku. Elektrony przestają się przemieszczać, gdy siła Lorentza zostaje zrównoważona przez siłę elektryczną $F_E = eE$, czyli zachodzi związek $E = vB$. Ponieważ grubość płytki jest dużo mniejsza od jej promienia, możemy ją traktować jako kondensator płaski, w którym napięcie między powierzchniami wynosi $U = Ed$, a ładunek na powierzchniach $Q = CU = Bv\varepsilon_0 S$, gdzie $S = \pi R^2$ jest powierzchnią płytki. Gdy prędkość płytki rośnie, zmieniają się ładunki na jej powierzchniach, czyli przez płytkę płynie prąd o natężeniu $I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{\varepsilon_0 SB\Delta v}{\Delta t} = \varepsilon_0 SBa$, gdzie a jest przyspieszeniem płytki. Na przewodnik z prądem w polu magnetycznym działa siła elektrodynamiczna, która w naszym przypadku ma zwrot pionowo w górę i wartość $F = IdB$. Równanie ruchu płytki ma postać $ma = mg - \varepsilon_0 SB^2 da$. Stąd szukane przyspieszenie jest równe $a = \frac{mg}{m+\varepsilon_0\pi R^2 B^2 d}$.

653. Oznaczmy wysokość słupa cieczy w nieruchomym naczyniu przez h, a rozmiary podstawy naczynia przez $2l$ i a. Zgodnie z treścią zadania $a \ll 2l$, możemy więc przyjąć, że powierzchnia cieczy w obracającym się naczyniu ma kształt jak na rysunku 4.

Odpowiedź na pierwsze pytanie jest oczywista. Siła parcia na dno równa jest ciężarowi cieczy niezależnie od tego, czy naczynie obraca się, czy pozostaje w spoczynku.

Rozważmy mały element cieczy o masie m na jej powierzchni w obracającym się naczyniu. Działa na niego siła ciężkości mg i siła reakcji N ze strony pozostałej cieczy, prostopadła do jej powierzchni (rys. 4). Wypadkowa tych dwóch sił jest siłą dośrodkową o wartości $F = m\omega^2 x$, gdzie ω jest prędkością kątową, a x odległością elementu cieczy od osi obrotu. Styczna do powierzchni cieczy w badanym punkcie nachylona jest do poziomu pod kątem α i spełnione są związki: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\omega^2 x}{\mathrm{g}} = y'(x)$, gdzie funkcja $y(x)$ opisuje kształt powierzchni cieczy. Stąd $y(x) = \frac{\omega^2 x^2}{2\mathrm{g}} + c$, a stałą c możemy wyznaczyć z warunków brzegowych. Gdy $y = 0$, $x = kl$, $0 \leqslant k < 1$, zatem $c = -\frac{\omega^2 k^2 l^2}{2\mathrm{g}}$. Ponieważ ciecz jest nieściśliwa i jej objętość stała, możemy wyznaczyć prędkość kątową obracającego się naczynia, przyrównując objętość cieczy w połówce naczynia spoczywającego i obracającego się:

$$alh = a\int\limits_{kl}^{l} y(x)dx = \frac{a\omega^2 l^3}{6\mathrm{g}}(1 - 3k^2 + 2k^3),$$

stąd

$$\omega^2 = \frac{6\mathrm{g}h}{l^2(1-3k^2+2k^3)}.$$

Wysokość cienkiego słupka cieczy stykającego się z wąską ścianką naczynia wynosi $H = y(l) = \omega^2 l^2 \frac{(1-k^2)}{2\mathrm{g}} = \frac{3(1-k^2)h}{1-3k^2+2k^3}$. Zgodnie z prawem Pascala ciśnienie cieczy na wąską ściankę boczną zmienia się liniowo z wysokością, a jego wartość średnia wynosi $p_r = \frac{\rho g H}{2}$, gdzie ρ jest gęstością cieczy. Szukany stosunek parć na ściankę boczną w obracającym się i nieruchomym naczyniu równy jest $n = \left(\frac{H}{h}\right)^2 = \left(\frac{3(1-k^2)}{1-3k^2+2k^3}\right)^2$. Wynik nie zależy od rodzaju i objętości cieczy, rozmiarów naczynia oraz przyspieszenia grawitacyjnego. Gdy $k = 0$, otrzymujemy $n = 9$.