

Stephen Hawking (1942–2018)

Sebastian J. SZYBKA*

*Obserwatorium Astronomiczne,
Uniwersytet Jagielloński



Rozwiązanie zadania M 1566.
Udowodnimy, że $k = n - 2$.

Oznaczmy krótko $A \rightarrow B$, jeżeli zawodnik A wygrał z zawodnikiem B , a trójkę zawodników (A, B, C) o tej własności, że $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$ nazwijmy remisową (trójki (A, B, C) , (B, C, A) , (C, A, B) utożsamiamy).

Rozważmy turniej szachowy z udziałem zawodników $A_1, A_2, \dots, A_{n-2}, X, Y$ o następujących wynikach:

- $X \rightarrow Y$;
 - $Y \rightarrow A_i \rightarrow X$ dla $i = 1, 2, \dots, n - 2$;
 - jeżeli $1 \leq i < j \leq n - 2$, to $A_i \rightarrow A_j$.
- Wówczas

$$A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \dots \rightarrow A_{n-2} \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow A_1,$$

więc opisany turniej spełnia założenia zadania (zawodnicy mogą usiąść przy okrągłym stole w określonej powyżej kolejności). W takim turnieju są dokładnie $n - 2$ trójki remisowe, mianowicie (A_i, X, Y) dla $i = 1, 2, \dots, n - 2$, co oznacza, że $k \leq n - 2$.

Dowód nierówności $k \geq n - 2$ przeprowadzimy indukcyjnie. Dla $n = 3$ jest dokładnie jedna trójka remisowa. Przypuśćmy, że liczba trójek remisowych w turnieju z n zawodnikami (których można odpowiednio usadzić przy okrągłym stole) jest nie mniejsza od $n - 2$, przy czym $n \geq 3$, i rozważmy dowolny turniej z $n + 1$ zawodnikami A_1, A_2, \dots, A_{n+1} , w którym

$$A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \dots \rightarrow A_{n+1} \rightarrow A_1.$$

Jeżeli $A_{i+2} \rightarrow A_i$ dla każdego $i = 1, 2, \dots, n + 1$ (gdzie $A_{n+2} = A_1$ oraz $A_{n+3} = A_2$), to każda z trójek (A_i, A_{i+1}, A_{i+2}) jest remisowa, więc jest ich co najmniej $n + 1$ (w szczególności więcej niż $n - 1$).

W przeciwnym przypadku istnieje takie i , że $A_i \rightarrow A_{i+2}$; bez straty ogólności (ewentualnie cyklicznie przenumerozując zawodników) przypuśćmy, że $i = n$. Wówczas z założenia indukcyjnego wynika, że A_1, A_2, \dots, A_n tworzą co najmniej $n - 2$ różne trójki remisowe. Wystarczy więc wykazać, że istnieje trójka remisowa, do której należy zawodnik A_{n+1} . Istotnie, skoro $A_{n+1} \rightarrow A_1$ oraz $A_n \rightarrow A_{n+1}$, to istnieje takie j ($1 \leq j \leq n - 1$), że

$$A_{j+1} \rightarrow A_{n+1} \rightarrow A_j,$$

na przykład $j = \min\{\ell : A_\ell \rightarrow A_{n+1}\} - 1$ i trójka (A_j, A_{j+1}, A_{n+1}) jest wówczas remisowa. To kończy dowód indukcyjny i rozwiązanie zadania.

Penrose pokazał, iż osobliwości wewnątrz czarnych dziur powstają bez względu na stopień „symetryczności” kolapsującej materii.

Pamiętajcie, aby patrzeć w górę na gwiazdy, a nie w dół na swoje stopy. Starajcie się zrozumieć to, co widzicie i zastanawiajcie się, dlaczego Wszechświat istnieje. Bądźcie ciekawi. Jakkolwiek życie wyda się wam trudne, zawsze jest coś, co możecie zrobić i co może się wam udać. Liczy się to, że się nie poddajecie.

Stephen Hawking

14 marca 2018 roku zmarł Stephen Hawking – wybitny fizyk teoretyk, kosmolog, relatywista, ale także autor popularnonaukowych książek sprzedanych w dziesiątkach milionów egzemplarzy. Miał 76 lat. Trudno byłoby znaleźć bardziej rozpoznawalną sylwetkę wśród współczesnych osobistości świata naukowego. Umysł Hawkinga, oczarowany tajemnicą istnienia i wbrew ograniczeniom ciała swobodnie wędrujący po Wszechświecie, na zawsze pozostanie symbolem triumfu myśli nad materią.

Stephen Hawking urodził się w Oksfordzie w Wielkiej Brytanii w 1942 roku. Jego ojciec Frank Hawking i matka Isobel (z domu Walker) byli absolwentami miejscowego uniwersytetu. Ojciec prowadził badania medyczne dotyczące chorób tropikalnych, natomiast matka studiowała ekonomię, politologię i filozofię. Gdy młody Stephen miał osiem lat, jego rodzina przeprowadziła się z Oksfordu do odległego o 90 km St Albans. Tam też uczęszczał do szkoły. Stypendium, które zdobył, umożliwiło mu rozpoczęcie studiów fizyki w Oksfordzie. Studia ukończył w roku 1962.

Hawking zaprzagnął kontynuować swoją naukową przygodę w Trinity Hall (Cambridge) pod okiem kosmologicznej gwiazdy owych czasów: Freda Hoyle’a. Składając dokumenty, nie wiedział, że to właśnie z Cambridge będzie związane całe jego naukowe życie. Zrzącenie losu sprawiło, że opiekunem doktoratu zamiast Hoyle’a został mało jeszcze wtedy znany Dennis Sciama. Sciama okazał się doskonałym promotorem. W latach sześćdziesiątych grupa Sciama oprócz Hawkinga składała się z George’a Ellisa, Brandona Cartera, Martina Reesa (inni późniejsi sławni wychowankowie Sciamy to Gary Gibbons i John D. Barrow).

Tuż po 21 urodzinach nadeszła wiadomość, która zdawała się przekreślać naukową karierę Hawkinga: okazało się, że jest nieuleczalnie chory. Postępujące stwardnienie zanikowe boczne to choroba neurodegeneracyjna powodująca śmierć przeważnie w ciągu kilku lat. Stephen Hawking, wbrew opiniom specjalistów, od momentu usłyszenia diagnozy żył jeszcze 55 lat. Większość swego życia spędził na wózku inwalidzkim.

W latach sześćdziesiątych teoria grawitacji Einsteina miała już pół wieku. Jednym z zagadkowych aspektów tej teorii, który od samego początku jej istnienia utrudniał fizyczną interpretację rozwiązań równań Einsteina, był problem osobliwości – miejsc lub zdarzeń, w których gęstość energii i krzywizna czasoprzestrzeni stają się nieskończone. Einstein i inni wielcy tych wczesnych lat, opierając się na analogiach ze znanymi im teoriami, odrzucali rozwiązania osobliwe jako нефizyczne. Nic w tym dziwnego – osobliwości mogą pojawić się nawet w teorii Newtona jako skutki uboczne zbyt uproszczonego modelowania lub sztucznie narzuconej wysokiej symetrii rozwiązań. Przypuszczano, iż osobliwości wewnątrz czarnych dziur i ta kosmologiczna są właśnie takimi artefaktami. Prawdziwy kolaps do czarnej dziury nie jest dokładnie sferycznie symetryczny, a rzeczywisty Wszechświat nie jest idealnie jednorodny. Oba uproszczenia były niezbędne do przeprowadzenia obliczeń i nie było wiadomo, jak sprawdzić, co dzieje się w bardziej realistycznych sytuacjach. W roku 1965 Roger Penrose, dzięki zastosowaniu nowatorskich metod matematycznych, udowodnił twierdzenie, z którego wynikało, iż osobliwości wewnątrz czarnych dziur nie są artefaktem upraszczających założeń. Innymi słowy, teoria grawitacji Einsteina przewiduje, iż we Wszechświecie istnieją zdarzenia lub miejsca, w których równania tej teorii załamują się. Stephen Hawking zmodyfikował i udoskonalił twierdzenie Penrose’a tak, aby w naturalny sposób dało się je

Matematyka Pogranicza

15–17 czerwca 2018

Białystok



Matematyka Pogranicza jest konferencją interdyscyplinarną, popularyzującą zastosowania i obecność matematyki w różnych dziedzinach naszego życia i środowiska – w architekturze, sztuce, przyrodzie, kosmosie, muzyce i wielu innych obszarach. Konferencja jest skierowana do szerokiego grona odbiorców. Jej zadaniem jest łączenie środowisk po obu stronach wschodnich granic Polski i jednocześnie szukanie pomostu między matematyką i innymi dziedzinami. Konferencja Matematyka Pogranicza będzie okazją do wszelakich rozmów i dzielenia się wiedzą różnych środowisk, w szczególności nauczycieli i matematyków ze wschodniego pogranicza Polski. Zapraszamy do udziału wszystkich zainteresowanych (nauczycieli szkolnych i akademickich nie tylko matematyki, historyków, architektów, muzyków oraz uczniów i studentów) z Polski i krajów sąsiadujących od strony wschodniej: Litwy, Ukrainy, Białorusi, Rosji, z zachodniej i południowej strony również.

mp.wi.pb.edu.pl

Według Hawkinga temperatura czarnej dziury (tu dla uproszczenia sferycznej czarnej dziury Schwarzschilda) jest odwrotnie proporcjonalna do jej masy M , i równa się

$$k_B T = \frac{\hbar c^3}{8\pi G M},$$

gdzie \hbar jest zredukowaną stałą Plancka, c prędkością światła w próżni, k_B stałą Boltzmanna, a G stałą grawitacyjną Newtona. Temperatura czarnej dziury o masie Słońca wynosi jedynie $6,2 \cdot 10^{-8}$ K.

zastosować do zagadnienia początkowej osobliwości. W pracach tych brali udział również Charles Misner, Robert Geroch i Brandon Carter. Pokazały one, iż istnienie Wielkiego Wybuchu jest naturalną konsekwencją teorii Einsteina i że równania tej teorii nie wystarczają do opisu chwili początkowej. W roku 1970 Stephen Hawking opublikował wspólnie z Rogerem Penrosem udoskonaloną wersję twierdzenia o osobliwościach.

Innym ważnym zagadnieniem, do którego zrozumienia przyczynił się Stephen Hawking, jest problem jednoznaczności czarnych dziur. Współczesna astronomia dostarcza nam wielu obserwacji przemawiających za istnieniem tych obiektów we Wszechświecie. Skala ich mas imponuje: od czarnych dziur gwiazdowych o kilku masach Słońca do obiektów galaktycznych o masach rzędów dziesiątek miliardów mas Słońca. Począwszy od roku 1967, właściwie do dzisiaj trwają badania nad twierdzeniami o jednoznaczności czarnych dziur. Nad zagadnieniem tym pracowało i nadal pracuje wielu fizyków. Jednym z nich był Stephen Hawking. Twierdzenia o jednoznaczności implikują, iż wszystkie czarne dziury, zarówno małe, jak i te gigantyczne, opisywane są przez to samo rozwiązanie równań Einsteina: odkrytą w 1963 roku czasoprzestrzeń Kerrą. Rozwiązanie Kerrą w odniesieniu do obiektów astrofizycznych zależy tylko od dwóch parametrów: masy i krętu. W roku 1973 Stephen Hawking uzasadnił podstawowe założenie pojawiające się w twierdzeniach o jednoznaczności. Wykazał on, że rotujące czarne dziury muszą mieć symetrię osiową. Co więcej, udowodnił, że jeżeli horyzont czarnej dziury (powierzchnia, po przekroczeniu której nie można się już z czarnej dziury wydostać) składa się z jednego „kawałka”, to musi on mieć kształt przypominający sferę (tzw. topologię sfery).

Twierdzenie o osobliwościach i twierdzenia o jednoznaczności czarnych dziur to tylko dwa przykładowe ważne zagadnienia, nad którymi pracował Stephen Hawking. W 1968 r. Stephen Hawking pokazał, jak w teorii Einsteina zdefiniować globalny czas. Trzy lata później udowodnił w ramach teorii klasycznej, iż bez względu na to, co wpadnie do czarnej dziury, pole powierzchni jej horyzontu nie może zmaleć. W tym samym roku razem z Garym Gibbonssem przedstawił jedną z pierwszych prac na temat analizy sygnałów fal grawitacyjnych. W roku 1973 wspólnie z Georgem Ellisem napisał książkę *The Large Scale Structure of Space-Time*. Książka ta do dzisiaj stanowi obowiązkową pozycję w bibliotece każdego relatywisty. Nie sposób wyliczyć wszystkich osiągnięć Hawkinga. Warto wspomnieć o szczególnie ważnym dla niego wzorze, który udało mu się wyprowadzić w roku 1974. Wiele lat temu na zakończenie spotkania zorganizowanego z okazji 60 urodzin Hawking wyraził życzenie, aby ten wzór został wryty na jego grobie.

Rok 1974 rozdziela dwa okresy w życiu naukowym Hawkinga: klasyczny i kwantowy. W roku 1972 Jacob Bekenstein przedstawił hipotezę, iż powierzchnia horyzontu czarnej dziury jest miarą zawartej w niej entropii (entropia to wielkość, za pomocą której fizycy mierzą „bałagan”, czyli ilość informacji zawartej w układzie). Drugie prawo termodynamiki implikuje, iż entropia układu izolowanego nie może maleć. Twierdzenie Hawkinga z roku 1971 pokazuje, że pole powierzchni horyzontu również nie może maleć. Ta analogia, według Bekensteina, sugerowała związek między dwiema wielkościami: entropią i powierzchnią horyzontu. Hipoteza Bekensteina spotkała się z dezaprobatą Hawkinga i jego kolegów. Przecież entropia związana jest z temperaturą, a skoro klasyczne czarne dziury nie emitują promieniowania, to ich temperatura wynosi dokładnie zero. Hawking, próbując wykazać błędność hipotezy Bekensteina, w pomysłowy sposób połączył procedury kwantowej teorii pola i teorii grawitacji Einsteina. Ku swojemu zaskoczeniu odkrył, iż czarne dziury nie są całkiem czarne – efekty kwantowe powodują, iż promieniają! To oznacza, że mają niezerową temperaturę i że można przypisać im entropię. Hawkingowi udało się wyprowadzić wzór

$$S = \frac{k_B c^3}{4\hbar G} A$$

wiązący entropię czarnej dziury S z polem powierzchni jej horyzontu A .

Właśnie to osiągnięcie uważał za jedno z najważniejszych w swoim życiu. Odkrycie Hawkinga zostało opublikowane w *Nature*. Promieniowanie czarnych dziur określa się mianem promieniowania Hawkinga.

Jeśli najbliższe czarne dziury mają masę rzędu kilku mas Słońca, to promieniowanie Hawkinga jest zbyt słabe, aby mogło zostać zaobserwowane w przewidywalnej przyszłości. Mimo to jest ono bardzo ważne dla teoretyków – prawdopodobnie stanowi klucz do pogodzenia dwóch fundamentalnych teorii fizycznych: mechaniki kwantowej i teorii grawitacji Einsteina. Z twierdzenia o osobliwościach wynika, że teoria grawitacji Einsteina nie wystarcza do opisu całego Wszechświata. Wiele osób przypuszcza, iż teoria kwantowej grawitacji wypełni luki teorii Einsteina. Praca Hawkinga z 1974 roku oraz wyniki uzyskane rok wcześniej wraz z Brandonem Carterem i Jamesem Bardeenem ujawniły szereg zaskakujących analogii między zachowaniem czarnych dziur i podstawowymi prawami termodynamiki. Przypuszcza się, iż teoria kwantowej grawitacji pozwoli zrozumieć termodynamikę czarnych dziur, tak jak fizyka statystyczna pozwoliła wyprowadzić z fundamentalnych zasad prawa termodynamiki klasycznej.

Odkrycie Hawkinga z roku 1974 sprawiło, iż skoncentrował on swoje zainteresowania na próbach pogodzenia teorii kwantowej z grawitacją. Kwantowa grawitacja powinna rozwiązać problem osobliwości, zarówno tych we wnętrzach czarnych dziur, jak i osobliwości początkowej. W roku 1983 Hawking razem z Jamesem Hartlem zaproponował rozwiązanie problemu narodzin Wszechświata (osobliwość początkowa) za pomocą procedury zwanej *no-boundary proposal*. Propozycja ta wywołała różne problemy, których nie udało się rozwiązać do dzisiaj. Ostatni artykuł Hawkinga, ukończony tuż przed śmiercią, dotyczył właśnie tego zagadnienia.

Osiągnięcia naukowe Stephena Hawkinga zostały szybko docenione. W wieku 32 lat został wybrany na członka *Royal Society*. W roku 1979 objął *Lucasian chair of natural philosophy* – pozycję profesorską, którą 310 lat wcześniej piastował sam Izaak Newton. Sława Hawkinga nie ograniczała się wyłącznie do świata naukowego. Dla wielu osób Stephen Hawking był znany jako autor bijącej rekordy popularności książki *Krótką historia czasu*. Książka ta została przetłumaczona na ponad 35 języków. Sprzedano ponad 10 milionów egzemplarzy.

Pomimo ciężkiej choroby Stephen Hawking nie stronił od aktywnego życia – odwiedził biegun południowy, doświadczył lotu samolotem w „zerowej grawitacji”, spotykał się z ciekawymi ludźmi, bywał w operze i na koncertach, współpracował z telewizją i kinem, gwiazdami muzyki. Często publicznie wypowiadał swoje opinie na tematy dotyczące wiary, przyszłości naszej cywilizacji i zagrożeń, które przed nami stoją. Sława nie przytłaczała go, lecz zdawała się mu służyć. Jego poglądy naukowe dwukrotnie stały się przedmiotem publicznych zakładów. Po raz pierwszy w roku 1974 założył się z Kipem Thornem (noblistą z roku 2017) o to, czy czarne dziury istnieją. Gdyby nie istniały, nagroda wynagrodziłaby Hawkingowi czas, który poświęcił na ich badanie. W roku 1997 przedmiotem zakładu między Stephenem Hawkingiem i Kipem Thornem z jednej strony oraz Johnem Preskillem z drugiej stał się tzw. paradoks utraty informacji. Zgodnie z mechaniką kwantową informacja, która wpadnie do czarnej dziury, nie może zniknąć w niej na zawsze. W praktyce spór dotyczył tego, czy prawa mechaniki kwantowej wymagają modyfikacji (Hawking, Thorn), czy też nie (Preskill). Chociaż w roku 2004 Hawking przyznał się do przegranej, to argumenty Hawkinga nie przekonały Kipa Thorna ani większości środowiska naukowego. Zagadka pozostaje wciąż nierozwiązana.

Stephen Hawking był dwukrotnie żonaty. Z pierwszego małżeństwa miał trójkę dzieci: Roberta, Lucy and Timothy’ego. Zmarł w swoim domu w Cambridge.

Model Hartle’a–Hawkinga to propozycja rozwiązania problemu początkowej osobliwości. W tym modelu pytanie o to, co działo się przed Wielkim Wybuchem, nie ma sensu. Czas wylania się ze stanu, który zawierał wyłącznie przestrzeń.



Rozwiązanie zadania M 1565.

Udowodnimy, że odpowiednie zaplanowanie rozgrywek jest możliwe dla każdego $n \geq 2$.

Rozważmy ostrosłup prawidłowy

$(2n - 1)$ -kątny o podstawie

$A_1 A_2 \dots A_{2n-1}$ i wierzchołku S .

Ponumerujmy zawodników liczbami od 1

do $2n$ i ustalmy, że zawodnik o numerze

$2n$ w i -tej rundzie gra z zawodnikiem

o numerze i , a dla $1 \leq k < \ell \leq 2n - 1$

zawodnicy o numerach k i ℓ grają ze sobą

w i -tej rundzie wtedy i tylko wtedy, gdy

$A_k A_\ell \perp SA_i$.

Łatwo zauważyć, że to poprawnie

wyznacza przebieg rozgrywek: pary

zawodników grających w każdej z rund są

rozłączne, nie powtarzają się w różnych

rundach (każdy bok oraz każda przekątna

podstawy ostrosłupa jest prostopadła do

dokładnie jednego z odcinków SA_i) oraz

każda runda składa się z dokładnie $2n - 1$

partii.