Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

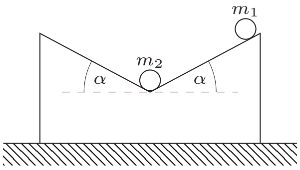
Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przesyłać również pocztą elektroniczną pod adresem `delta@mimuw.edu.pl` (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VII 2018

Zadania z fizyki nr 658, 659

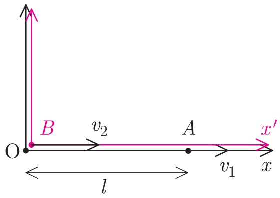
Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA



Rys. 1

658. Kulka o masie m_2 leży na nieważkiej podstawce (rys. 1). Podstawka ma kształt prostopadłościanu połączonego z dwoma stykającymi się klinami o kątach nachylenia α. Nie ma tarcia między podłożem a podstawką. Na prawym klinie położono kulkę o masie m_1 i puszczono swobodnie. Jaki warunek musi być spełniony, aby kulka o masie m_2 zaczęła w wyniku tego wsuwać się na lewy klin? Między kulkami a podstawką również nie ma tarcia.

659. Nieprzewodząca cienka płytka kwadratowa o boku d jest równomiernie naładowana ładunkiem Q. Na osi symetrii płytki prostopadłej do jej płaszczyzny, w odległości $\frac{d}{2}$ od płytki, umieszczono ładunek punktowy q. Znaleźć wartość siły elektrostatycznej działającej na ten ładunek.



Rys. 2

Rozwiązania zadań z numeru 1/2018

Przypominamy treść zadań:

650. Radar na Ziemi obserwuje dwa pojazdy kosmiczne poruszające się z relatywistycznymi prędkościami. Pojazd A porusza się z prędkością v_1, goni go pojazd B, poruszający się w tym samym kierunku z prędkością $v_2 > v_1$. W chwili początkowej odległość między pojazdami wynosi l. Po jakim czasie pojazd B dogoni A z punktu widzenia obserwatora na Ziemi oraz z punktu widzenia kosmonauty w pojeździe B?

651. Dwie jednakowo naładowane kulki o takich samych masach umieszczono w odległości l od siebie i puszczono swobodnie. Po czasie t odległość między nimi wzrosła dwukrotnie. Po jakim czasie wzrośnie dwukrotnie odległość między tymi kulkami, gdy ich odległość początkowa będzie wynosić $3l$?

650. Przyjmijmy, że obserwator O związany z Ziemią i obserwator związany z pojazdem B zsynchronizowali swoje zegary, gdy znajdowali się w tym samym miejscu i tę chwilę uznali za zerową (rys. 2). Zdarzeniem początkowym jest odbicie sygnału radarowego wysłanego z Ziemi od pojazdu A, któremu obserwator O przypisuje współrzędną czasową $t_1 = 0$ oraz współrzędną przestrzenną $x_{A_1} = l$. W układzie statku B to samo zdarzenie zachodzi w chwili $t_1' = (0 - v_2 l/c^2)/\sqrt{1 - v_2^2/c^2}$, w miejscu o współrzędnej przestrzennej $x'_{A_1} = l/\sqrt{1 - v_2^2/c^2}$, zgodnie z transformacją Lorentza.

Zdarzenie końcowe – statek B dogania A – zachodzi w układzie Ziemi w miejscu o współrzędnej $x_{A_2} = l + v_1 t_2 = v_2 t_2$, stąd chwila zdarzenia wynosi $t_2 = l/(v_2 - v_1)$. W układzie statku B miejsce zdarzenia ma współrzędną $x'_{A_2} = 0$ i zachodzi w chwili

$$t_2' = (t_2 - (v_2 x_{A_2}/c^2)/\sqrt{1 - v_2^2/c^2} = t_2\sqrt{1 - v_2^2/c^2}.$$

W układzie Ziemi statek B dogoni A po czasie $\Delta t = t_2 - t_1 = l/(v_2 - v_1)$.

W układzie statku B szukany czas wynosi

$$\Delta t' = t_2' - t_1' = \frac{l(1 - (v_1 v_2)/c^2)}{(v_2 - v_1)\sqrt{1 - v_2^2/c^2}}.$$

Ten sam wynik możemy otrzymać ze wzoru $\Delta t' = \Delta x'/v_{A/B}$, gdzie $\Delta x' = x'_{A_2} - x'_{A_1} = -l/\sqrt{1 - v_2^2/c^2}$, a $v_{A/B} = (v_1 - v_2)/\sqrt{1 - v_1 v_2/c^2}$ jest prędkością statku A względem B.

651. Oznaczmy odległość początkową między kulkami przez $2x_0$ i obliczmy ich prędkości v, gdy odległość ta osiągnie wartość $2x$. Z zasady zachowania energii otrzymujemy $v = \sqrt{\frac{q^2}{8\pi m\varepsilon_0} \cdot \frac{x - x_0}{x x_0}}$, gdzie m jest masą, a q ładunkiem kulki.

Widać, że prędkości kulek zależą od ich położenia względnego k oraz położenia początkowego

$$(*) \qquad v = \sqrt{\frac{q^2}{8\pi m\varepsilon_0} \cdot \frac{k-1}{k x_0}}, \quad \text{gdzie } k = x/x_0.$$

Podczas ruchu kulki k zmienia się od 1 do 2. Podzielmy przemieszczenia kulek w obu rozważanych przypadkach na jednakową liczbę odcinków, dla których Δk są takie same. Przemieszczenie kulki przy zmianie k o Δk wynosi $\Delta x = \Delta k x_0$ i w drugim przypadku jest 3 razy większe niż w pierwszym: $\Delta x_2/\Delta x_1 = 3$. Z $(*)$ wynika, że dla danego k prędkość kulki w pierwszym przypadku jest $\sqrt{3}$ razy większa niż w drugim. Przy zmianie k o małe Δk średnie prędkości kulek również będą różnić się $\sqrt{3}$ razy: $v_{śr_1}/v_{śr_2} = \sqrt{3}$. Czasy, w których kulki przemieszczają się o Δx_i, są równe: $\Delta t_i = \Delta x_i/\Delta t_{iśr}$, gdzie $i = 1, 2$. Stosunek tych czasów w rozważanych przypadkach dany jest wzorem $\Delta t_2/\Delta t_1 = 3\sqrt{3}$. Całkowity czas ruchu w drugim przypadku wynosi $t_2 = 3\sqrt{3}t$.

Zadania z matematyki nr 761, 762

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VII 2018

761. Trójkąt ABC (nie prostokątny) jest wpisany w okrąg o średnicy AD. Punkt E jest symetryczny do A względem środka boku BC. Dowieść, że okręgi opisane na trójkątach ABC i BDE mają równe promienie.

762. Rozważamy liczby naturalne $n \geqslant 2$.
(a) Udowodnić, że jeśli liczba $2^n - 1$ jest bezkwadratowa, to liczby n oraz $2^n - 1$ są względnie pierwsze.
(b) Wykazać, że nie zachodzi implikacja odwrotna.

Zadanie 762 zaproponował pan Tomasz Ordowski.

Rozwiązania zadań z numeru 1/2018

Przypominamy treść zadań:

753. Wewnątrz trójkąta ABC leży punkt D. Proste AD i BD przecinają boki BC i AC odpowiednio w punktach E i F. Udowodnić, że jeśli $|AE| + |AF| = |BE| + |BF|$, to $|AC| + |AD| = |BC| + |BD|$.

754. Znaleźć wszystkie trójki liczb rzeczywistych $x, y, z \geqslant 0$, spełniające układ równań

$$x + y + z = 1, \qquad 9(xy + yz + zx) = 2 + 9(x^3 + y^3 + z^3).$$

753. Weźmy pod uwagę okrąg ω, dopisany do trójkąta ADF przy boku AD, styczny do tego boku w punkcie X, oraz okrąg ω', dopisany do trójkąta BDE przy boku BD, styczny do prostej ED w punkcie X'. Wzory, wyrażające długości odcinków stycznych, są dobrze znane (lub/oraz łatwe do uzasadnienia):

$$\begin{aligned} 2 \cdot |DX| &= |AF| + |AD| - |DF|, \\ 2 \cdot |DX'| &= |BE| + |BD| - |DE|. \end{aligned}$$

Odejmujemy stronami:

$$\begin{aligned} 2 \cdot |DX| - 2 \cdot |DX'| &= |AF| - |BE| + |AD| + |DE| - |BD| - |DF| = \\ &= |AF| - |BE| + |AE| - |BF|. \end{aligned}$$

To wyrażenie ma wartość 0, w myśl założenia zadania. Stąd wniosek, że punkty X i X' pokrywają się; to zaś oznacza, że ω i ω' to ten sam okrąg, styczny do prostych AC, BC, AE, BF (kolejno) w punktach U, V, X $(=X')$, Y.
Z położenia tych punktów na odpowiednich prostych wynikają równości

$$\begin{aligned} |AC| + |AD| &= |CU| - |AU| + |AX| + |DX| = |CU| + |DX|, \\ |BC| + |BD| &= |CV| - |BV| + |BY| + |DY| = |CV| + |DY|. \end{aligned}$$

Sumy, uzyskane po prawych stronach, są równe, bo $|CU| = |CV|$, $|DX| = |DY|$. Stąd równość sum po lewych stronach – czyli teza zadania.

754. Niech x, y, z będą liczbami nieujemnymi, spełniającymi podany układ równań. Ich suma, więc i jej kwadrat, wynosi 1; wobec tego

$$xy + yz + zx = \frac{1 - (x^2 + y^2 + z^2)}{2}.$$

Wstawiając to do drugiego równania układu, po prostym przekształceniu dostajemy równanie

$$2(x^3 + y^3 + z^3) + (x^2 + y^2 + z^2) = \frac{5}{9}. \tag{1}$$

Funkcja $f(t) = 2t^3 + t^2$ jest ściśle wypukła w przedziale $[0, \infty)$, zatem spełnia nierówność Jensena

$$f(x) + f(y) + f(z) \geqslant 3f\left(\frac{x + y + z}{3}\right) = 3f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{5}{9}. \tag{2}$$

Równanie (1) oznacza, że (dla rozważanych liczb x, y, z) nierówność (2) staje się równością, co ma miejsce jedynie, gdy te liczby są równe. Ich suma jest jedynką, więc $x = y = z = 1/3$; ta trójka liczb spełnia oba równania układu i stanowi jego jedyne rozwiązanie.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
644 ($WT = 2{,}63$), 645 ($WT = 3{,}1$)
z numeru 10/2017

Marian Łupieżowiec	Gliwice	38,86
Jacek Konieczny	Poznań	29,80
Ryszard Woźniak	Kraków	28,77
Krzysztof Magiera	Łosiów	28,70
Tomasz Wietecha	Tarnów	28,03

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
747 ($WT = 2{,}24$) i 748 ($WT = 1{,}64$)
z numeru 10/2017

Adam Dzedzej	Gdańsk	47,10
Marcin Kasperski	Warszawa	43,83
Roksana Słowik	Knurów	43,26
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	39,71
Michał Koźlik	Gliwice	32,23

Pan Adam Dzedzej mija metę po raz trzeci i zostaje trzydziestym siódmym Weteranem Klubu 44 M.