Kij ma dwa końce...

Joanna JASZUŃSKA

...medal – dwie strony, czego nie ma tu, musi być tam, a co weszło, musi wyjść.

1. Siedem kulek w dowolny sposób dzielimy na dwie niepuste grupy i notujemy iloczyn liczb kulek w obu grupach. Następnie procedurę tę powtarzamy, wybierając za każdym razem dowolną grupę kulek, aż uzyskamy siedem grup po jednej kulce. Wtedy sumujemy zapisane liczby. Niezależnie od sposobu rozdzielania, wynikiem jest 21. Dlaczego? Czy dla 77 kulek wynik też jest zawsze ten sam?

2. Na pewnym siedmioosobowym przyjęciu niektórzy przywitali się poprzez uścisk ręki. Czy możliwe, że każdy uścisnął ręce dokładnie trzech innych osób?

3. Wykaż, że liczba wszystkich osób od początku istnienia świata, które uścisnęły ręce nieparzystej liczbie innych osób, jest parzysta.

4. W pewnej grupie złożonej ze 100 chłopców i 100 dziewcząt każdy zna dokładnie 8 osób przeciwnej płci. Wykaż, że dowolnych k chłopców z tej grupy zna „wspólnymi siłami" co najmniej k dziewcząt.

5. Wykaż, że w każdej grupie osób istnieją takie dwie, które mają w tej grupie tyle samo znajomych (znajomości są symetryczne i nikt nie liczy sam siebie).

6. W balu wzięło udział 102 królewiczów i 103 królewny. Po balu okazało się, że każdy królewicz zatańczył z taką samą liczbą królewien. Udowodnij, że pewne dwie królewny zatańczyły z taką samą liczbą królewiczów.

7. Na przyjęciu u pewnego małżeństwa gośćmi były cztery inne małżeństwa. Niektórzy przywitali się, podając sobie ręce, nikt nie witał się ze swoim współmałżonkiem. Gospodarz spytał każdego z pozostałych uczestników przyjęcia (również własną żonę), ile rąk uścisnęli. Każdy podał inną liczbę. Jaką podała gospodyni?

8. Jaś chciałby każdego ze swych trzech gości powitać uściskiem dłoni. Każda z tych czterech osób cierpi na inną chorobę, zaraźliwą przez dotyk. Na szczęście Jaś ma rękawiczki, ale niestety tylko dwie. Czy może przywitać się z każdym z gości tak, aby nikt nikogo nie zaraził?

9. Na nieskończenie wielkim stole leży nieskończenie wiele monet, początkowo dokładnie 20 z nich orłem do góry. Monety można odwracać na drugą stronę i przesuwać. Należy podzielić je na dwie grupy tak, aby w każdej grupie tyle samo monet leżało orłem do góry. Jak tego dokonać z zawiązanymi oczami (bez możliwości spojrzenia na monety w żadnym momencie, również początkowym) i w rękawiczkach (bez możliwości wyczuwania, czy dana moneta leży orłem czy reszką do góry)?

10. Ponad połowę powierzchni pewnej idealnie kulistej planety zajmują lądy. Wykaż, że istnieje taka średnica tej planety, której oba końce są na lądzie.

Zakładamy, że lądy i morza mają *przyzwoite* (mierzalne) kształty.

11. Czy istnieje taki 11-kąt i taka prosta, która przecina wszystkie boki tego 11-kąta (nie w wierzchołkach)?

12. Każdy kij ma dwa końce. Ile końców ma 5 i pół kija?

Rozwiązania i wskazówki do niektórych zadań

R1. Na początku połączmy każde dwie kulki nitką. Ilekroć pewną grupę dzielimy na n i k kulek, przecinamy wszystkie $n \cdot k$ nitek pomiędzy rozdzielanymi kulkami. Kulki pozostające w jednej grupie nadal są połączone. W efekcie, po uzyskaniu pojedynczych kulek, przetniemy wszystkie nitki (i każdą tylko raz), a rozważana suma iloczynów to właśnie liczba tych nitek. $\square$

R2. Nie. Gdyby tak było, to liczba uścisków dłoni byłaby równa $7 \cdot 3/2$, bo w każdym z nich uczestniczą dwie osoby. Jednak liczba ta nie jest całkowita. $\square$

R4. Niech rozważane osoby będą ośmiornicami i niech każda poda jedną kończynę każdej znajomej osobie przeciwnej płci. Wtedy dowolne grono k chłopców podaje dziewczętom łącznie $8k$ kończyn. Jednocześnie każde dziewczę jest w stanie chwycić najwyżej 8 z nich, znajomych dziewczyn musi więc być co najmniej k. $\square$

R5. Gdyby w n-osobowej grupie każdy miał inną liczbę znajomych, to byłyby to liczby $0, 1, 2, \ldots, n-1$. Nie jest jednak możliwe, by ktoś znał wszystkich pozostałych $n-1$ osób i jednocześnie ktoś inny miał 0 znajomych. $\square$

W6. Gdyby każda królewna tańczyła z inną liczbą królewiczów, to byłyby to wszystkie liczby od 0 do 102. Ile różnych par zatańczyłoby wtedy na balu?

Zad. pochodzi z VIII Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów.

W7. Każdy podał inną liczbę, więc podano wszystkie wyniki od 0 do 8. Osoby, które powiedziały 0 i 8, są małżeństwem, ponieważ...

R8. Tak. Wkłada jedną rękawiczkę na drugą i wita się z gościem 1. Następnie zdejmuje zewnętrzną rękawiczkę i wita się z gościem 2. Potem gość 3 wkłada zewnętrzną rękawiczkę (jej wnętrze jest czyste) i wita się z Jasiem. $\square$

R9. Do jednej grupy weźmy dowolnych 20 monet i wszystkie je odwróćmy. Drugą grupę niech tworzą pozostałe monety. W obu grupach po tyle samo monet leży teraz orłem do góry, bo jeśli wśród wybranych 20 monet było ich n, to po odwróceniu jest ich $20 - n$, czyli tyle samo, ile wśród pozostałych monet. $\square$

R10. Gdyby każda średnica o jednym końcu na lądzie miała drugi koniec w wodzie, to łączna powierzchnia lądów byłaby co najwyżej taka, jak wód – sprzeczność. $\square$

R11. Nie. Prosta przecinająca wielokąt na przemian wchodzi do jego wnętrza i z niego wychodzi. Zaczyna i kończy na zewnątrz, przecina więc obwód parzystą liczbę razy. $\square$