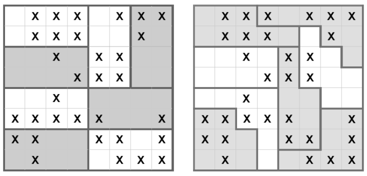
Przykład 1. Każde pole planszy przedstawia jednego głosującego. $\times$ oznacza głos oddany na partię A, puste pole to głos oddany na partię B. Na rysunku z lewej obie partie zdobywają taką samą liczbę mandatów. Jeśli jednak zmienimy kształt okręgów tak jak na rysunku z prawej strony, to wygra partia A, zdobywając 5 mandatów.



Z lewej współczynnik $EG = 0$, z prawej wynosi $-\frac{1}{8}$.

Przykład 2. Można znaleźć przykład takich wyników głosowania na dwie partie, żeby w jednym układzie okręgów wygrała partia A, a w innym B.

Przykład 3. Czy możliwe jest, żeby sytuacja z przykładu 2 miała miejsce, gdy okręgi są dwumandatowe?
W 2015 roku w USA odbyła się rozprawa pod nazwą „Gill v. Whitford”, w której sąd najwyższy zgodnie z radą pomysłodawców *efficiency gap* zasądził, że maksymalny dopuszczalny poziom EG to 0,07. Tym samym stwierdzono, że wybory z 2012 i 2014 roku w Wisconsin były niekonstytucyjne (EG wyniosło odpowiednio 0,13 oraz 0,1).

Przykład 4. W wyborach startują dwie partie. Przyjmując, iż sprawiedliwy jest taki podział, że $EG = 0{,}07$, jakie jest najmniejsze procentowe poparcie dla jednej z partii, żeby miała ona większość w parlamencie?

Głosami zmarnowanymi (*wasted votes*) nazywamy wszystkie głosy na przegraną partię oraz na wygraną powyżej progu 50% (tzn. te, które były zbędne do zwycięstwa). Oznacza to, że zawsze połowa głosów jest zmarnowana.

Analogicznie jak poprzednio, niech W_i^P to będzie liczba głosów zmarnowanych w okręgu δ_i przez głosujących na partię P, zaś W^P – liczba zmarnowanych głosów we wszystkich okręgach. Zachodzi następująca zależność $W_i^A = V_i^A - S_i^A \cdot \frac{V_i}{2}$ (przypomnijmy, że okręgi są jednomandatowe). Spójrzmy, jak wyglądają głosy zmarnowane na partie A i B. W tym celu zdefiniujmy współczynnik *efficiency gap*

$$EG = \sum_{i=1}^{S} \frac{W_i^A - W_i^B}{V} = \frac{W^A - W^B}{V}.$$

Jeżeli EG jest dodatnie, oznacza ono niesprawiedliwość wobec partii A, gdy ujemne, to dla B. Gdy $EG \approx 0$, wówczas obie partie straciły podobną liczbę głosów i taką sytuację uznaje się za sprawiedliwą.

Przyjrzyjmy się bliżej informacji, którą niesie współczynnik EG. Zauważmy, że

$$W_A = \sum_{i=1}^{S} W_i^A = V^A - S^A \frac{V}{2S},$$

stąd

$$EG = \frac{V^A - V^B}{V} - \frac{1}{2}\frac{S^A - S^B}{S} = \nu - \frac{1}{2}\sigma.$$

Niektóre usterki współczynnika EG:

- Współczynnik EG nie odwzorowuje proporcji głosów w liczbie zdobytych miejsc. Tzn. jeśli partia A zdobywa w całym kraju 66% głosów, zaś partia B uzyskała 34%, to wówczas $\nu = 0{,}32$. Aby współczynnik EG był jak najbliższy 0, to $\sigma = 0{,}64$, czyli partia A powinna zdobyć 82% miejsc, zaś partia B tylko 18%.
- Jeśli partia A będzie miała co najmniej 79% poparcia w społeczeństwie, to niezależnie jak wybierzemy okręgi, będzie
$$\nu - \frac{1}{2}\sigma \geqslant 0{,}58 - 0{,}5 > 0{,}07;$$
wybory zawsze byłyby więc niesprawiedliwe (jeśli uznamy, że takie są wtedy, gdy EG przekracza 0,07). Wynika to z tego, że *przewaga wygranych miejsc* ma 2 razy mniejsze znaczenie od *przewagi głosów* w społeczeństwie.
- Dla okręgu i poziom sprawiedliwości $EG_i = \frac{W_i^A - W_i^B}{V_i}$ wynosi zero tylko wtedy, gdy jedna partia zdobędzie 3 razy więcej głosów od drugiej. Wtedy sprawiedliwym podziałem jest taki, w którym w każdym z okręgów proporcje głosów wynoszą 3 : 1.

Zachęcamy do przyjrzenia się nieco poprawionej metodzie mierzenia niesprawiedliwości

$$\widetilde{EG} = \frac{W^A}{V^A} - \frac{W^B}{V^B}.$$

Nie istnieje jednoznaczny, powszechnie stosowany sposób sprawdzania, czy podział jest sprawiedliwy. W Stanach Zjednoczonych powoływane są specjalne zespoły czuwające nad takimi podziałami. Zauważmy, że nie wszystkie założenia przytoczonego modelu daje się spełnić (np. równa liczba wyborców w każdym okręgu i jednocześnie równa liczba oddanych głosów), stąd pole do poprawy modelu jest jeszcze spore.

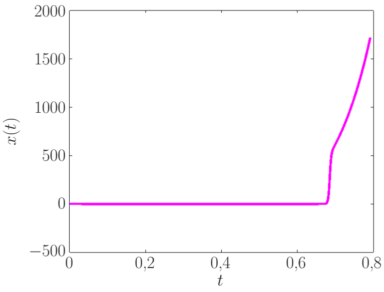
Zadania

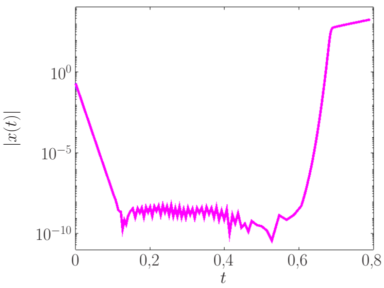
Przygotował Michał NAWROCKI

F 949. Cegła spada na piłkę tenisową z wysokości 1 m i odskakuje, praktycznie biorąc, na taką samą wysokość, z jakiej spadła. Na jaką wysokość podskoczy piłka?
Rozwiązanie na str. 7

F 950. Przy fotografowaniu tygrysa nie zaleca się do niego zbliżać bardziej niż na odległość $L = 20$ m. Jaką głębokość powinna mieć camera obscura z otworem o średnicy $d = 1$ mm, aby na fotografii były widoczne pręgi na skórze tygrysa? Przyjąć, że odległość między pręgami wynosi $l = 20$ cm.
Rozwiązanie na str. 7

Patrzysz, ale czy widzisz?





W *Małej Delcie* (P. Biecek, *Pokaż im to!*, Δ^8_{17}) mogliśmy przeczytać o tym, jak ważne jest graficzne przedstawienie danych w *przekonujący* sposób. Ale zdarza się też na odwrót: niewinnie wyglądający i *bardzo* przekonujący wykres może sprowadzić nas na manowce.

Rozważmy równanie różniczkowe
$$x'(t) = x(t) \cdot (e^{At} - B - x(t)),$$
wywodzące się z pewnego modelu matematycznego przebiegu choroby zakaźnej. Nie wnikając w szczegóły modelu i w konkretne wartości parametrów $A, B > 0$, uznajmy, że szukana funkcja $x(t)$ odpowiada (przeskalowanej) liczbie osób zarażonych przypadającej na jednostkę powierzchni w chwili czasu t. Zakładamy, że w chwili $t = 0$ liczba chorych jest niewielka, ale dodatnia.

Traktując to równanie standardowym pakietem komputerowym MATLAB, dostajemy rozwiązanie o „rozsądnym” przebiegu, o czym możemy *przekonać się, patrząc* na rysunek na górze: na początku, przez dłuższy czas populacja chorych $x(t)$ utrzymuje się na poziomie bliskim (kto wie, może nawet równym?) zeru, a następnie zaczyna szybko rosnąć.

Jednak gdy dokładnie to samo rozwiązanie zobrazujemy inaczej: na wykresie, którego pionowa oś jest w skali logarytmicznej (rysunek na dole) – ujawnią się dodatkowe informacje. Okazuje się (czego wcześniej nie widzieliśmy), że na początku rozwiązanie maleje, ale potem na dłużej stabilizuje się na poziomie 10^{-10}, by na koniec (co wszak widzieliśmy na poprzednim obrazku) szybko urosnąć. Ze względu na skalę logarytmiczną możemy mieć złudzenie, że ostatnia faza wzrostu jest dosyć wolna – lecz to właśnie jest tylko złudzenie.

No dobrze, dzięki użyciu innej skali zyskaliśmy wgląd w zachowanie się rozwiązania dla bardzo małych wartości (skala liniowa to uniemożliwiała) – ale czy cokolwiek więcej z tego wynika? Owszem! Niepokój może budzić to, że w zakresie bardzo małych wartości funkcja $x(t)$ zachowuje się nieregularnie: teoria równań różniczkowych przewiduje zaś, że nasze rozwiązanie powinno mieć *gładki* przebieg, niezależnie od tego, czy skala osi jest logarytmiczna, czy liniowa. Jednak z drugiej strony, wahania są przecież bardzo drobne, oscylujące wokół wartości 10^{-10}, czyli prawie zera – więc może nie ma czym się przejmować?

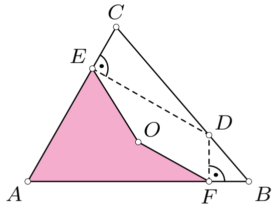
Może lepiej nie szukać dziury w całym, tzn. nie przyglądać się *aż tak* dokładnie – w końcu przecież sensownie i estetycznie wyglądającemu – wykresowi na górze? Odpowiemy w następnym numerze *Delty*.

Piotr KRZYŻANOWSKI
Uniwersytet Warszawski, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

Zadania

Redaguje Łukasz BOŻYK

M 1561. Nieujemne liczby rzeczywiste a, b, c spełniają nierówność $a + b + c \geqslant abc$. Udowodnić, że $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant abc$.
Rozwiązanie na str. 3



M 1562. Punkt D leży na boku BC trójkąta ostrokątnego ABC. Punkty E i F są rzutami prostokątnymi punktu D odpowiednio na boki AC i AB. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC. Udowodnić, że pole czworokąta $AEOF$ jest równe połowie pola trójkąta ABC.
Rozwiązanie na str. 2

M 1563. Dana jest liczba pierwsza p. Funkcja $f(x) = ax + b$, gdzie a i b są liczbami całkowitymi, ma tę własność, że liczby
$$f(0),\ f(f(0)),\ \ldots,\ \underbrace{f(f(\ldots f}_{p}(0)\ldots))$$
dają parami różne reszty przy dzieleniu przez p. Wykazać, że $p \mid a - 1$.
Rozwiązanie na str. 2