



Wysokości czworokąta Joanna JASZUŃSKA

Wysokości czworokąta nazwijmy prostą przechodzącą przez środek jego boku i prostopadłą do boku przeciwnego. W niektórych czworokątach wszystkie cztery wysokości przecinają się w jednym punkcie – *ortocentrum czworokąta*. Przykładowo kwadrat ma ortocentrum, a romb niebędący kwadratem nie ma.

Rozważmy czworokąt $ABCD$. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunkach 1 i 2.

Lemat. $KLMN$ to równoległobok, a jego środek S jest też środkiem odcinka PQ .

W dowodzie można wykorzystać np. linię środkową (*deltoid* 5/2017) lub środki ciężkości (*deltoid* 12/2011), a przy okazji wykazać, że punkt S jest środkiem ciężkości układu punktów A, B, C, D .

Twierdzenie. Czworokąt ma ortocentrum wtedy i tylko wtedy, gdy można na nim opisać okrąg.

Dowód. Na mocy lematu, symetria środkowa względem S przeprowadza punkt M na K , a wysokość z M na prostą przez K i prostopadłą do AB , czyli na symetralną boku AB . Analogicznie obrazami pozostałych wysokości są odpowiednie symetralne boków. Wobec tego ortocentrum czworokąta istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje wspólny punkt symetralnych jego boków, czyli środek okręgu opisanego. \square

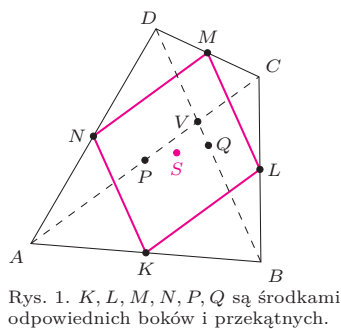
Wniosek. Punkty H, S, O leżą na jednej prostej, w tej kolejności i $HS = SO$.

W zadaniach 1, 2, 4 i 5 zakładamy, że czworokąt $ABCD$ ma ortocentrum.

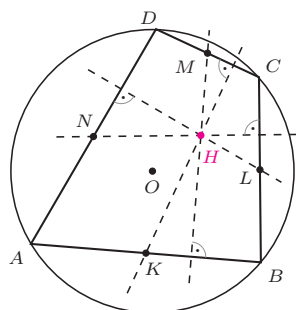
1. Udowodnij, że punkt H jest ortocentrum trójkąta PQV .

2. Niech proste AB i CD przecinają się w punkcie W . Wykaż, że $WH \perp KM$.

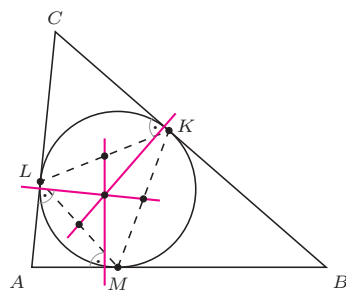
3. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków BC, CA, AB odpowiednio w punktach K, L, M . Udowodnij, że proste przechodzące przez środki odcinków KL, LM, MK i prostopadłe odpowiednio do boków AB, BC, CA przecinają się w jednym punkcie.



Rys. 1. K, L, M, N, P, Q są środkami odpowiednich boków i przekątnych.



Rys. 2. H – ortocentrum czworokąta



Rys. 3

Polecam hasła *multitudes* i *anticenter* na stronie www.cut-the-knot.org.

Rozwiązania

R1. Wiemy, że symetria względem S zamienia punkty P i Q oraz punkty O i H . Symetralna odcinka AC jest do niego prostopadła, przechodzi przez jego środek P i przez O – środek okręgu, w którym AC jest cięciwą. Jej obrazem w symetrii względem S jest więc prosta prostopadła do AC , przechodząca przez Q (czyli wysokość trójkąta PQV) i przez H . Analogicznie wysokość trójkąta PQV z wierzchołka P też przechodzi przez H , co kończy dowód. \square

R2. Proste KH i MH są wysokościami trójkąta KMW , więc WH też jest. \square

R3. Niech S oznacza środek ciężkości trójkąta KLM (rys. 3). Wówczas jednokładność o środku S i skali -2 przeprowadza środek odcinka KL na punkt M . Wobec tego przy tej jednokładności obrazem prostej przechodzącej przez tenże środek i prostopadłej do AB jest prosta przechodząca przez punkt M i prostopadła do AB , czyli prosta przechodząca przez środek I okręgu wpisanego w trójkąt ABC . Analogicznie obrazami pozostałych opisanych w zadaniu prostych też są proste przez I . Stąd również wyjściowe proste są współpękowe. \square

Zadania domowe

4. Niech H_A, H_B, H_C, H_D będą odpowiednio ortocentrami trójkątów BCD, CDA, DAB, ABC . Wykaż, że odcinki AH_A, BH_B, CH_C, DH_D mają wspólny punkt.

Wskazówka. Punkt H jest ich wspólnym środkiem.

Wynika stąd dodatkowo, że czworokąty $ABCD$ oraz $H_AH_BH_CH_D$ są przystające, co daje inne rozwiązanie zadania 4 z *deltoidu* 3/2010.

5. Niech O' i O'' oznaczają odbicia symetryczne punktu O względem prostych AB i CD . Udowodnij, że punkt H leży na prostej $O'O''$.

6. Udowodnij, że płaszczyzny przechodzące przez środki krawędzi czworościanu i prostopadłe do przeciwnych krawędzi mają wspólny punkt (*punkt Monge'a*).

7. Wykaż, że w każdym trójkącie ortocentrum H , środek ciężkości S i środek okręgu opisanego O leżą na jednej prostej (*prostej Eulera*), w tej kolejności i $HS = 2 \cdot SO$.

Dowód znaleźć można m.in. w *deltoidzie* 2/2010.

8. Wykaż, że w dowolnym trójkącie proste równoległe do dwusiecznych poprowadzone przez środki przeciwnych boków przecinają się w jednym punkcie.