

dotychczasowych narzutów czasowych. Każdy z rdzeni jego komputera taktuje z częstotliwością 2,5 GHz. Agatka nie jest jeszcze taką dobrą programistką jak jej starszy brat. Stała ukryta w złożoności programu Agatki wynosi 20. Komputer Agatki to bardzo stary Commodore 64 z procesorem taktującym z częstotliwością 1 MHz. Wydawać by się mogło, że Agatka nie ma żadnych szans. Jednak sprytna siostra zażądała, żeby sortowali oboje wszystkich ludzi na świecie. W sumie około 8 000 000 000 nazwisk.

Komputery będą działały długo i trochę wody w Wiśle upłynie, zanim rodzeństwo dowie się, kto wygrał zakład. My to obliczymy już teraz. Przyjmując dodatkowe założenia, możemy obliczyć, że program Agaty będzie się liczył około  $3,6 \cdot 10^6$  sekund, natomiast program Bartka  $6,4 \cdot 10^8$  sekund. Mówiąc bardziej obrazowo: program Agatki skończy się liczyć w półtora miesiąca, natomiast program Bartka będzie się liczył ponad 20 lat.

$$(1/10) \cdot (8 \cdot 10^9)^2 / 10 \text{ GHz} = 64 \cdot 10^{17} / 10^{10} = 6,4 \cdot 10^8$$

Krzysztof PIECUCH

## Resztki

– *Skończyłam!* – krzyknęła triumfalnie Agatka do swojego brata, Bartka. Dziewczynka regularnie domaga się od starszego chłopca rozmaitych ciekawostek matematycznych, których ten dowiaduje się w liceum. Tym razem Bartek, aby uzyskać chwilę spokoju, przykazał jej (twierdząc, że jest w tym jakiś głębszy sens) umieścić w tabelce  $21 \times 10$  liczby od 1 do 210 w taki sposób, aby numery wiersza i kolumny, w jakich znajdzie się dana liczba, odpowiadały jej resztom z dzielenia odpowiednio przez 21 i 10. – *To było dość żmudne i jakoś nie wydaje mi się, by kryło się tu coś ciekawego... na pewno nie chciałeś się mnie po prostu pozbyć na chwilę?*

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
1	1	22	43	64	85	106	127	148	169	190
2	191	2	23	44	65	86	107	128	149	170
3	171	192	3	24	45	66	87	108	129	150
4	151	172	193	4	25	46	67	88	109	130
5	131	152	173	194	5	26	47	68	89	110
6	111	132	153	174	195	6	27	48	69	90
7	91	112	133	154	175	196	7	28	49	70
8	71	92	113	134	155	176	197	8	29	50
9	51	72	93	114	135	156	177	198	9	30
10	31	52	73	94	115	136	157	178	199	10
11	11	32	53	74	95	116	137	158	179	200
12	201	12	33	54	75	96	117	138	159	180
13	181	202	13	34	55	76	97	118	139	160
14	161	182	203	14	35	56	77	98	119	140
15	141	162	183	204	15	36	57	78	99	120
16	121	142	163	184	205	16	37	58	79	100
17	101	122	143	164	185	206	17	38	59	80
18	81	102	123	144	165	186	207	18	39	60
19	61	82	103	124	145	166	187	208	19	40
20	41	62	83	104	125	146	167	188	209	20
0	21	42	63	84	105	126	147	168	189	210

– *Ależ skąd!* – odpowiedział brat z udawanym oburzeniem. – *Zauważ najpierw, że żadne dwie liczby nie zostały wpisane w tę samą komórkę. Gdyby bowiem tak się stało, to te dwie liczby dawałyby tę samą resztę z dzielenia przez 10 i 21. W tej sytuacji ich różnica byłaby podzielna przez 10 i 21, a zatem przez 210 (byłaby więc zerem), gdyż... – i tu Bartek teatralnie zawiesił głos.*

– *... gdyż są to liczby względnie pierwsze!* – dokończyła prędko Agatka, ponieważ niedawno omawiali ten temat na kółku matematycznym. Po chwili dodała: – *A skoro zarówno liczb, jak i komórek jest 210, więc w każdej komórce wyląduje jakaś liczba!*

– *Doskonale.* – pochwalił siostrę Bartek. – *Udowodniłaś właśnie Chińskie Twierdzenie o Resztach: każdy układ reszt z dzielenia przez parami względnie pierwsze liczby jest możliwy do zrealizowania. A skoro jesteśmy przy liczbach względnie pierwszych, zwróć uwagę na kolejną rzecz. Otóż jeśli wybierzesz dowolną liczbę względnie pierwszą z 210, to jej wierszowa współrzędna jest względnie pierwsza z 21, a kolumnowa z 10 i odwrotnie: każda taka para współrzędnych określa liczbę względnie pierwszą z 210 (dowód nie jest trudny, spróbuj sama!). – mówiąc to, Bartek zamalował na kolorowo wszystkie liczby, które nie były względnie pierwsze z 210. – *W tej sytuacji, jeśli przez  $\varphi(n)$  oznaczymy liczbę liczb mniejszych od  $n$  i względnie pierwszych z  $n$ , to musi zachodzić  $\varphi(210) = \varphi(10) \cdot \varphi(21)$ . Podobna zależność zachodzi z tych samych względów dla iloczynu dowolnych dwóch liczb względnie pierwszych.**

– *Wspaniale!* – wykrzyknęła Agatka. – *W tej sytuacji  $\varphi(210)$  wynosi  $1 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 6$ , czyli 48. Nie mogłeś mi tego wszystkiego powiedzieć bez tej upiornej tabelki...?*

Łukasz RAJKOWSKI