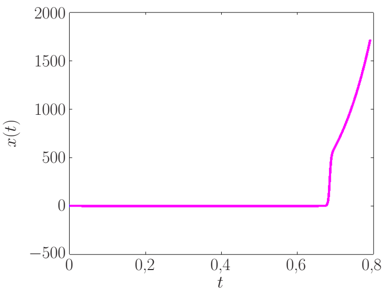
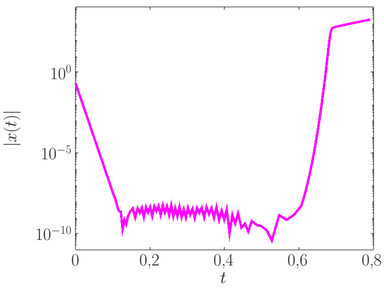
Patrzysz, ale czy widzisz?





W *Małej Delcie* (P. Biecek, *Pokaż im to!*, Δ^8_{17}) mogliśmy przeczytać o tym, jak ważne jest graficzne przedstawienie danych w *przekonujący* sposób. Ale zdarza się też na odwrót: niewinnie wyglądający i *bardzo* przekonujący wykres może sprowadzić nas na manowce.

Rozważmy równanie różniczkowe
$$x'(t) = x(t) \cdot (e^{At} - B - x(t)),$$
wywodzące się z pewnego modelu matematycznego przebiegu choroby zakaźnej. Nie wnikając w szczegóły modelu i w konkretne wartości parametrów $A, B > 0$, uznajmy, że szukana funkcja $x(t)$ odpowiada (przeskalowanej) liczbie osób zarażonych przypadającej na jednostkę powierzchni w chwili czasu t. Zakładamy, że w chwili $t = 0$ liczba chorych jest niewielka, ale dodatnia.

Traktując to równanie standardowym pakietem komputerowym MATLAB, dostajemy rozwiązanie o „rozsądnym” przebiegu, o czym możemy *przekonać się, patrząc* na rysunek na górze: na początku, przez dłuższy czas populacja chorych $x(t)$ utrzymuje się na poziomie bliskim (kto wie, może nawet równym?) zeru, a następnie zaczyna szybko rosnąć.

Jednak gdy dokładnie to samo rozwiązanie zobrazujemy inaczej: na wykresie, którego pionowa oś jest w skali logarytmicznej (rysunek na dole) – ujawnią się dodatkowe informacje. Okazuje się (czego wcześniej nie widzieliśmy), że na początku rozwiązanie maleje, ale potem na dłużej stabilizuje się na poziomie 10^{-10}, by na koniec (co wszak widzieliśmy na poprzednim obrazku) szybko urosnąć. Ze względu na skalę logarytmiczną możemy mieć złudzenie, że ostatnia faza wzrostu jest dosyć wolna – lecz to właśnie jest tylko złudzenie.

No dobrze, dzięki użyciu innej skali zyskaliśmy wgląd w zachowanie się rozwiązania dla bardzo małych wartości (skala liniowa to uniemożliwiała) – ale czy cokolwiek więcej z tego wynika? Owszem! Niepokój może budzić to, że w zakresie bardzo małych wartości funkcja $x(t)$ zachowuje się nieregularnie: teoria równań różniczkowych przewiduje zaś, że nasze rozwiązanie powinno mieć *gładki* przebieg, niezależnie od tego, czy skala osi jest logarytmiczna, czy liniowa. Jednak z drugiej strony, wahania są przecież bardzo drobne, oscylujące wokół wartości 10^{-10}, czyli prawie zera – więc może nie ma czym się przejmować?

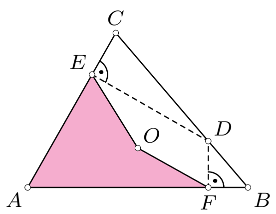
Może lepiej nie szukać dziury w całym, tzn. nie przyglądać się *aż tak* dokładnie – w końcu przecież sensownie i estetycznie wyglądającemu – wykresowi na górze? Odpowiemy w następnym numerze *Delty*.

Piotr KRZYŻANOWSKI
Uniwersytet Warszawski, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

Zadania

Redaguje Łukasz BOŻYK

M 1561. Nieujemne liczby rzeczywiste a, b, c spełniają nierówność $a + b + c \geqslant abc$. Udowodnić, że $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant abc$.
Rozwiązanie na str. 3



M 1562. Punkt D leży na boku BC trójkąta ostrokątnego ABC. Punkty E i F są rzutami prostokątnymi punktu D odpowiednio na boki AC i AB.
Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC. Udowodnić, że pole czworokąta $AEOF$ jest równe połowie pola trójkąta ABC.
Rozwiązanie na str. 2

M 1563. Dana jest liczba pierwsza p. Funkcja $f(x) = ax + b$, gdzie a i b są liczbami całkowitymi, ma tę własność, że liczby
$$f(0),\ f(f(0)),\ \ldots,\ \underbrace{f(f(\ldots f}_{p}(0)\ldots))$$
dają parami różne reszty przy dzieleniu przez p. Wykazać, że $p \mid a - 1$.
Rozwiązanie na str. 2