Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

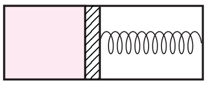
Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przesyłać również pocztą elektroniczną pod adresem `delta@mimuw.edu.pl` (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 VI 2018

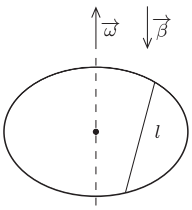
Zadania z fizyki nr 656, 657

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA



Rys. 1

656. Naczynie odizolowane cieplnie od otoczenia rozdzielone jest na dwie części tłokiem, który może przemieszczać się bez tarcia (rys. 1). Tłok połączony jest z prawą ścianką naczynia za pomocą sprężyny. Gdy tłok styka się z lewą ścianką naczynia, sprężyna jest nieodkształcona. W lewej części naczynia znajduje się n moli jednoatomowego gazu doskonałego, w prawej części jest próżnia. Ile ciepła musi pobrać gaz (np. od umieszczonej w naczyniu spirali grzewczej), aby jego temperatura wzrosła o ΔT? Pojemność cieplną naczynia, tłoka i sprężyny zaniedbujemy.



Rys. 2

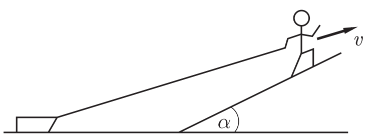
657. Na nieprzewodzącym dysku o promieniu R umocowany jest wzdłuż cięciwy drut o długości l (rys. 2). Dysk obraca się ze stałą prędkością kątową ω. Wektor indukcji jednorodnego pola magnetycznego $\vec{B}$ skierowany jest prostopadle do dysku. Znaleźć siłę elektromotoryczną indukcji między środkiem a końcem drutu.

Rozwiązania zadań z numeru 12/2017

Przypominamy treść zadań:

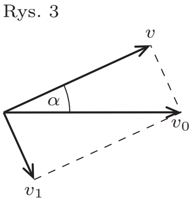
648. Człowiek wchodzi ze stałą prędkością v na zbocze nachylone pod kątem α do poziomu (rys. 3) i ciągnie sanki o masie m za pomocą nierozciągliwej, lekkiej linki o długości l. Sanki ślizgają się bez tarcia po powierzchni poziomej. Jakie jest naprężenie linki, gdy tworzy ona z poziomem kąt α?

649. Na bardzo cienką przezroczystą płytkę naniesiono nieprzezroczyste, koncentryczne pierścienie. Położenia i rozmiary pierścieni są tak dobrane, że równoległa wiązka światła o długości fali $\lambda = 500$ nm, padająca prostopadle na płytkę, ogniskuje się w odległości $f = 25$ cm od płytki. Rozmiary płytki są małe w porównaniu z odległością f.
a) Wyznaczyć promienie wewnętrzne i zewnętrzne dwóch najbliższych centrum nieprzezroczystych pierścieni.
b) W jakiej odległości od płytki powstanie obraz punktowego źródła światła monochromatycznego o tej samej długości fali co wiązka równoległa, umieszczonego w odległości a od płytki na jej osi przechodzącej przez środki pierścieni?



Rys. 3

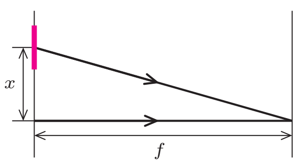
648. Prędkość sanek v_0 jest pozioma, możemy rozłożyć ją na składowe v równoległą do linki i v_1 prostopadłą do linki (rys. 4). Zachodzi związek $v_1 = v\mathrm{tg}\alpha$. W układzie inercjalnym, związanym z człowiekiem, sanki poruszają się po okręgu o promieniu l z prędkością v_1 i przyspieszeniem dośrodkowym $a_d = v_1^2/l$. Jedyną siłą działającą na sanki w kierunku poziomym jest składowa siły naprężenia linki N. Nadaje ona sankom przyspieszenie $a = (N\cos\alpha)/m$. Składowa tego przyspieszenia równoległa do linki jest przyspieszeniem dośrodkowym: $a_d = a\cos\alpha = (N\cos^2\alpha)/m = v_1^2/l$. Stąd siła naprężenia linki dana jest wzorem: $N = (mv^2\,\mathrm{tg}^2\,\alpha)/(l\cos^2\alpha)$.



Rys. 4

649. a) Różnica dróg promieni biegnących od centrum płytki i z punktu odległego o x od centrum płytki do środka ekranu umieszczonego w odległości f od płytki (rys. 5) wynosi: $\Delta s = \sqrt{f^2 + x^2} - f$. W przybliżeniu $x \ll f$, $\Delta s = f\sqrt{1 + x^2/f^2} - f \approx x^2/(2f)$. Miejsca, z których biegnące fale osłabiałyby falę biegnącą z centrum płytki, powinny być nieprzezroczyste. Zachodzi dla nich związek: $\lambda/4 + k\lambda < \Delta s < 3\lambda/4 + k\lambda$, gdzie $k = 0, 1, 2, \ldots$. Stąd

$$\sqrt{\lambda f(1+4k)/2} < x_k < \sqrt{\lambda f(3+4k)/2}.$$



Rys. 5

Pierwszy nieprzezroczysty pierścień ($k = 0$) ma promień wewnętrzny $r_0 = \sqrt{\lambda f/2} = 0{,}25$ mm, zewnętrzny $R_0 = \sqrt{3\lambda f/2} = 0{,}43$ mm, drugi $r_1 = 0{,}56$ mm, $R_1 = 0{,}66$ mm. b) niech szukana odległość wynosi b. Chcemy, żeby różnica dróg promieni przechodzących przez punkt odległy o x od środka płytki i przechodzących przez środek płytki była taka sama, jak w przypadku wiązki równoległej:

$$\Delta s = \left(\sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + x^2}\right) - (a + b) \approx x^2\left(\frac{1}{2a} + \frac{1}{2b}\right) = \frac{x^2}{2f}.$$

Stąd $1/a + 1/b = 1/f$.

Zadania z matematyki nr 759, 760

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 VI 2018

759. Ciąg nieskończony $x_0, x_1, x_2, \ldots$ jest określony wzorem rekurencyjnym $x_{n+1} = 2^{2-x_n}$ dla $n = 0, 1, 2, \ldots$; wyraz początkowy x_0 jest dowolną liczbą z przedziału $(3/2, 2)$. Wyznaczyć wszystkie liczby, będące granicami zbieżnych podciągów ciągu (x_n).

760. Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele dodatnich liczb rzeczywistych x, dla których każda z liczb $x^{1/2} + x^{-1/2}$ oraz $x^{1/3} + x^{-1/3}$ jest całkowita.

Zadanie 760 zaproponował pan Paweł Kubit z Krakowa.

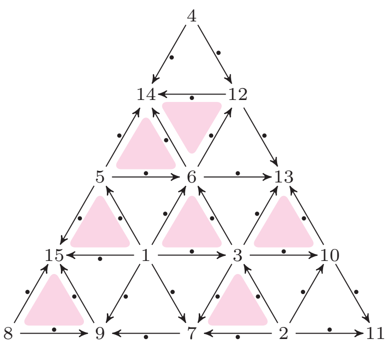
Rozwiązania zadań z numeru 12/2017

Przypominamy treść zadań:

751. Trójkąt równoboczny o boku długości n został podzielony (prostymi równoległymi do boków) na n^2 trójkątów o boku 1 (trójkątów jednostkowych). Wierzchołkom powstałej siatki zostały przyporządkowane różne liczby rzeczywiste ($(n+1)(n+2)/2$ różnych liczb). Trójkąt jednostkowy nazwiemy zorientowanym dodatnio, jeśli – idąc wzdłuż jego brzegu, w kierunku wzrastania liczb przy wierzchołkach (tj. startując od najmniejszej i idąc przez średnią do największej) – mamy jego wnętrze po lewej stronie. Dla ustalonej liczby naturalnej n wyznaczyć najmniejszą i największą wartość liczby trójkątów jednostkowych zorientowanych dodatnio.

752. Znaleźć wszystkie pary liczb całkowitych dodatnich, których średnia arytmetyczna i średnia geometryczna różnią się o 1.

751. Utworzona siatka składa się z $K = 3n(n+1)/2$ krawędzi i rozcina płaszczyznę na $T+1$ obszarów: $T = n^2$ trójkącików jednostkowych oraz składową nieograniczoną, nazywaną oceanem. Każdą krawędź traktujemy jako odcinek skierowany, od końca, oznaczonego liczbą mniejszą, do końca, oznaczonego liczbą większą. W pobliżu każdej krawędzi kładziemy marker na obszarze, który do niej przylega po stronie lewej (względem zwrotu strzałki).



Łącznie położyliśmy K markerów. Rysunek ilustruje sytuację, gdy $n = 4$ (więc $K = 30$, $T = 16$), wraz z przykładowym ponumerowaniem wierzchołków; kropki oznaczają markery; zacienione są trójkąciki zorientowane dodatnio (w sensie sprecyzowanym w treści zadania).

Na każdym trójkąciku zorientowanym dodatnio znalazły się dwa markery; na trójkąciku zorientowanym ujemnie – jeden marker. Więc jeśli mamy D trójkącików zorientowanych dodatnio, to w obrębie całego dużego trójkąta znalazło się $T + D$ markerów. Pozostałe, w liczbie $K - T - D$, są na oceanie.

Każdy marker na oceanie odpowiada krawędzi zorientowanej ujemnie względem wnętrza dużego trójkąta – czyli takiej, że obchodząc cały jego brzeg i mając jego wnętrze po lewej stronie, idziemy niezgodnie ze zwrotem strzałki (odnotowujemy spadek wartości przy wierzchołkach). Może być tylko jeden taki odcinek, mogą to też być wszystkie z wyjątkiem jednego (czyli $3n - 1$). Dostajemy nierówności $1 \leqslant K - T - D \leqslant 3n - 1$; po podstawieniu $K = 3n(n+1)/2$, $T = n^2$ i prostym przekształceniu uzyskujemy dwustronne oszacowanie

$$\frac{n^2 - 3n + 2}{2} \leqslant D \leqslant \frac{n^2 + 3n - 2}{2}.$$

Po obu stronach jest możliwa realizacja równości: wystarczy oznaczyć wierzchołki siatki, leżące na brzegu dużego trójkąta, liczbami tworzącymi ciąg monotoniczny (po wystartowaniu z dowolnie wybranego wierzchołka oraz ustaleniu kierunku obchodzenia), z jedynym zakłóceniem monotoniczności przy zamknięciu cyklu. Liczby po obu stronach napisanej nierówności stanowią odpowiedź na pytanie postawione w zadaniu. [Warto zauważyć, że liczby, przyporządkowane wierzchołkom wewnętrznym, nie mają już dla wartości D żadnego znaczenia].

752. Niech a, b będą liczbami naturalnymi, spełniającymi warunek $\sqrt{ab} + 1 = (a+b)/2$. Wymierny pierwiastek z liczby naturalnej jest liczbą naturalną. Zatem ab musi być kwadratem liczby naturalnej. Oznaczając przez d największy wspólny dzielnik liczb a, b (tak, że $a = a'd$, $b = b'd$; a', b' względnie pierwsze) widzimy, że czynniki a', b' muszą być kwadratami: $a = x^2d$, $b = y^2d$ (x, y naturalne). Badane równanie przybiera postać $dxy + 1 = (x^2d + y^2d)/2$; po przekształceniu: $d(x-y)^2 = 2$. Stąd wniosek, że $d = 2$, $|x - y| = 1$.

Uzyskaliśmy odpowiedź: liczby a, b to podwojone kwadraty dwóch kolejnych liczb naturalnych. Proste sprawdzenie pokazuje, że każda taka para spełnia wymagany warunek.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 642 ($WT = 2{,}2$), 643 ($WT = 2{,}2$) z numeru 9/2017

Marian Łupieżowiec	Gliwice	38,33
Jacek Konieczny	Poznań	29,80
Ryszard Woźniak	Kraków	28,77
Krzysztof Magiera	Łosiów	28,70
Karol Łukanowski	Niemcz	23,89
Tomasz Wietecha	Tarnów	22,30

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 745 ($WT = 2{,}25$) i 746 ($WT = 1{,}75$) z numeru 9/2017

Marcin Kasperski	Warszawa	43,83
Adam Dzedzej	Gdańsk	43,22
Roksana Słowik	Knurów	41,91
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	39,71