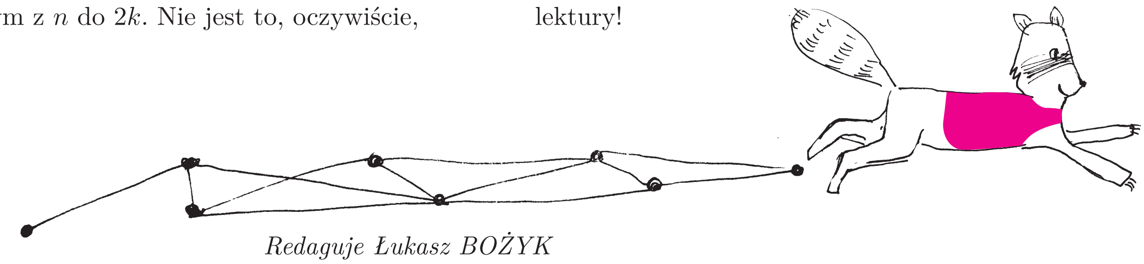
Ostatnią rzeczą jest wielkość jądra, które otrzymamy. Okazuje się, że rozmiar naszego nowego grafu G' będzie wynosił co najwyżej $2k$. Wystarczy zauważyć, że jest on tym samym, co liczba wierzchołków „połowicznych”, co z kolei wynosi nie więcej niż podwojona wielkość rozwiązania naszego LP, które musi być mniejsze niż k, gdyż w przeciwnym przypadku dostalibyśmy już odpowiedź *nie*. Powyższe zdanie matematycznie zapiszemy w postaci

$$|V(G')| = |V_{1/2}| = \sum_{v\in V_{1/2}} 2x_v \leqslant 2\sum_{v\in V} x_v \leqslant 2k.$$

W ten oto prosty sposób udało nam się ograniczyć przestrzeń, którą musimy przejrzeć w czasie wykładniczym z n do $2k$. Nie jest to, oczywiście, jedyna redukcja, którą można zastosować do tego problemu. Okazuje się, że sam proces redukcji można jeszcze przyspieszyć, sprowadzając nasze LP do problemu przepływu w grafie. Po więcej szczegółów na temat algorytmów parametryzowanych (jak i tego sprowadzenia) można zajrzeć do książki *Parameterized Algorithms*, która na użytek własny jest dostępna za darmo w internecie.

Oczywiście, nie jest to też jedyne zastosowanie programowania półcałkowitoliczbowego. W internecie można znaleźć pracę *Half-integrality, LP-branching and FPT Algorithms*, w której jest więcej szczegółów, jak i zastosowań tego rozwiązania. Serdecznie zachęcam do lektury!



Zadania

Redaguje Łukasz BOŻYK

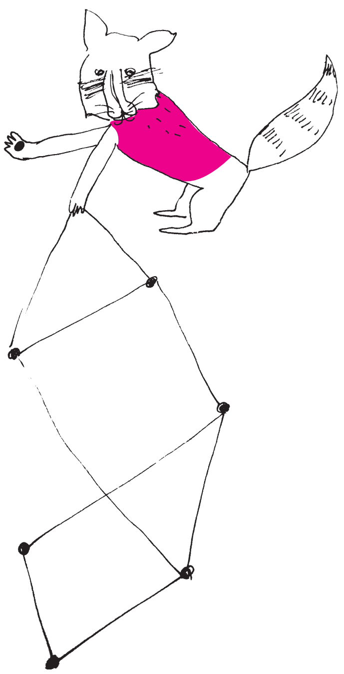
M 1558. Czy istnieją liczby całkowite a, b, c o tej własności, że każdy z trójmianów kwadratowych

$$ax^2 + bx + c \quad \text{oraz} \quad (a+1)x^2 + (b+1)x + (c+1)$$

ma obydwa pierwiastki całkowite?
Rozwiązanie na str. 22

M 1559. Pierwsza ćwiartka płaszczyzny z kartezjańskim układem współrzędnych jest podzielona prostymi o równaniach $x = n$ oraz $y = n$ dla $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$ na kwadraty jednostkowe, zwane dalej *polami*. Czy można wyróżnić niektóre pola w taki sposób, że:
• każdy kwadrat o bokach całkowitej długości równoległych do osi układu i jednym z wierzchołków w punkcie $(0, 0)$ zawiera więcej pól wyróżnionych niż niewyróżnionych;
• każda prosta równoległa do prostej $y = x$ przecina wnętrze tylko skończenie wielu wyróżnionych pól?
Rozwiązanie na str. 11

M 1560. Wyznaczyć iloczyn długości wszystkich boków i przekątnych n-kąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu 1.
Rozwiązanie na str. 22



Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 947. Doświadczenia z rozpraszaniem cząstek naładowanych na jądrach atomowych wskazują, że promień jądra R rośnie z liczbą A nukleonów jak $R = r_0 A^{1/3}$, gdzie $r_0 \approx 1{,}25 \cdot 10^{-15}$ m. Korzystając z zasady nieoznaczoności, oszacuj na tej podstawie średnią energię E_B wiązania nukleonu w jądrze. Masa nukleonu $M \approx 940\,\mathrm{MeV/c^2}$, a iloczyn $\hbar$, tj. stałej Plancka podzielonej przez 2π i prędkości światła c wynosi $\hbar c = 197 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{MeV \cdot m}$.
Rozwiązanie na str. 18

F 948. Jony uranu U, znajdujące się w ciekłym cyrkonie $ZrSiO_4$, mieszają się z nim, podstawiając jony Zr, a jony ołowiu Pb nie reagują z cyrkonem i szybko dyfundują poza jego objętość. Po zestaleniu cyrkonu, dyfuzja praktycznie ustaje. W kryształach cyrkonu, znajdujących się w skale znalezionej w Zimbabwe, zmierzono, że stosunek liczby atomów ołowiu ^{206}Pb do liczby atomów uranu ^{238}U wynosi $x = 0{,}5$. Jaki jest wiek tej skały, jeśli w serii kolejnych rozpadów alfa i beta, ^{238}U rozpada się do ^{206}Pb z czasem połowicznego zaniku $t_{1/2} = 4{,}47 \cdot 10^9$ lat?
Rozwiązanie na str. 18