

Z notatnika geniusza

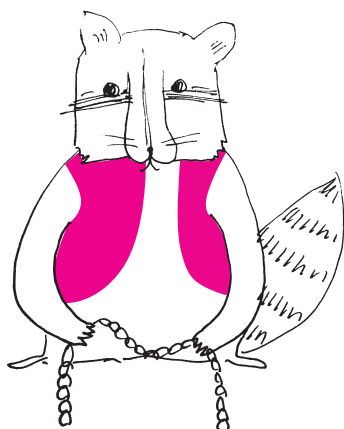
Jarosław GÓRNICKI*

*Wydział Matematyki i Fizyki
Stosowanej, Politechnika Rzeszowska

Srinivasa Ramanujan Ijengar (1887–1920) był indyjskim matematykiem z prowincji Madras, genialnym samoukiem obdarzonym niezwykłym talentem do odkrywania zaskakujących zależności liczbowych. Swobodnie posługiwał się ułamkami łańcuchowymi, szeregami liczbowymi, funkcjami eliptycznymi. Pozostawił około 3900 wzorów, z których jedynie niewielka część została dotychczas sprawdzona.

Część 1. Dla odważnych

Wgląd w nadzwyczajne zdolności i wyobraźnię Ramanujana daje lektura fragmentu jego listu wysłanego z Madrasu 16 stycznia 1913 r. do angielskiego matematyka Godfreya Harolda Hardy'ego (1877–1947). List zawierał około 120 wzorów matematycznych bez wyjaśnień i komentarzy. Kilkanaście z nich Hardy uznał za reprezentatywne [2] (każdy może zmierzyć się z ich uzasadnieniem).



$$(1) 1 - \frac{3!}{(1!2!)^3}x^2 + \frac{6!}{(2!4!)^3}x^4 + \dots = \left(1 + \frac{x}{(1!)^3} + \frac{x^2}{(2!)^3} + \dots\right) \left(1 - \frac{x}{(1!)^3} + \frac{x^2}{(2!)^3} - \dots\right)$$

$$(2) 1 - 5\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 9\left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^3 - 13\left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^3 + \dots = \frac{2}{\pi}$$

$$(3) 1 + 9\left(\frac{1}{4}\right)^4 + 17\left(\frac{1 \cdot 5}{4 \cdot 8}\right)^4 + 25\left(\frac{1 \cdot 5 \cdot 9}{4 \cdot 8 \cdot 12}\right)^4 + \dots = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{\pi} \cdot \{\Gamma(\frac{3}{4})\}^2}$$

$$(4) 1 - 5\left(\frac{1}{2}\right)^5 + 9\left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^5 - 13\left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^5 + \dots = \frac{2}{\{\Gamma(\frac{3}{4})\}^4}$$

$$(5) \int_0^\infty \frac{1 + (\frac{x}{b+1})^2}{1 + (\frac{x}{a})^2} \cdot \frac{1 + (\frac{x}{b+2})^2}{1 + (\frac{x}{a+1})^2} \dots dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\Gamma(a + \frac{1}{2})\Gamma(b+1)\Gamma(b-a + \frac{1}{2})}{\Gamma(a)\Gamma(b + \frac{1}{2})\Gamma(b-a+1)},$$

$[0 < a < b + \frac{1}{2}]$

$$(6) \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)(1+r^2x^2)(1+r^4x^2)\dots} = \frac{\pi}{2(1+r+r^3+r^6+r^{10}+\dots)}$$

(7) jeżeli $\alpha \cdot \beta = \pi^2$, to

$$\alpha^{-\frac{1}{4}} \left(1 + 4\alpha \int_0^\infty \frac{x e^{-\alpha x^2}}{e^{2\pi x} - 1} dx\right) = \beta^{-\frac{1}{4}} \left(1 + 4\beta \int_0^\infty \frac{x e^{-\beta x^2}}{e^{2\pi x} - 1} dx\right)$$

$$(8) \int_0^a e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{e^{-a^2}}{2a + \frac{1}{a + \frac{2}{2a + \frac{3}{a + \frac{4}{2a + \dots}}}}}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{e^{-a^2}}{2a + \frac{1}{a + \frac{2}{2a + \frac{3}{a + \frac{4}{2a + \dots}}}}$$

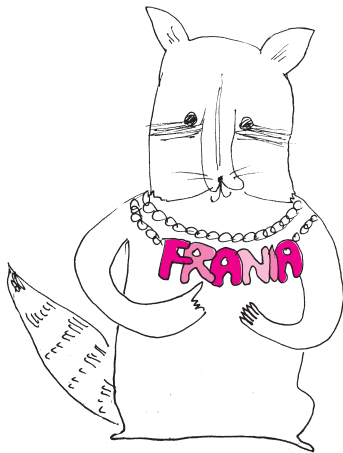
$$(9) 4 \int_0^\infty \frac{x e^{-x\sqrt{5}}}{\cosh x} dx = \frac{1}{1+} \frac{1^2}{1+} \frac{1^2}{1+} \frac{2^2}{1+} \frac{2^2}{1+} \frac{3^2}{1+} \frac{3^2}{1+} \dots$$

$$(10) \text{ jeżeli } u = \frac{x}{1+} \frac{x^5}{1+} \frac{x^{10}}{1+} \frac{x^{15}}{1+} \dots \text{ i } v = \frac{\sqrt[5]{x}}{1+} \frac{x}{1+} \frac{x^2}{1+} \frac{x^3}{1+} \dots,$$

$$\text{to } v^5 = u \cdot \frac{1 - 2u + 4u^2 - 3u^3 + u^4}{1 + 3u + 4u^2 + 2u^3 + u^4}$$

$$(11) \frac{1}{1+} \frac{e^{-2\pi}}{1+} \frac{e^{-4\pi}}{1+} \dots = \left\{ \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} - \frac{\sqrt{5}+1}{2} \right\} \cdot e^{\frac{2\pi}{5}}$$

$$(12) \frac{1}{1+} \frac{e^{-2\pi\sqrt{5}}}{1+} \frac{e^{-4\pi\sqrt{5}}}{1+} \dots = \left[\frac{\sqrt{5}}{1 + \sqrt[5]{5^{\frac{3}{4}} \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{\frac{5}{2}}}} - \frac{\sqrt{5}+1}{2} \right] \cdot e^{\frac{2\pi}{\sqrt{5}}}$$



Wzory (1)–(4) okazały się przykładami szeregów hipergeometrycznych, których badanie zapoczątkowali Euler i Gauss. Wzory (5) i (6) wydały się Hardy’emu najmniej efektywne. Wykazał ich słuszność, choć miał z tym większy kłopot, niż się spodziewał. We wzorach (7)–(9) Hardy rozpoznał równości znane sobie i swoim współpracownikom. Natomiast wzory (10)–(12) Hardy uznał za bardzo zagadkowe i trudne do uzasadnienia. Pisał o nich „zupełnie mnie pokonały; nigdy wcześniej nie widziałem czegoś choćby podobnego. Wystarczyło jedno spojrzenie, by się zorientować, że zostały napisane przez matematyka najwyższej klasy”, i dodał „muszą być prawdziwe, bo nikt nie miałby tyle wyobraźni, żeby je wymyślić”. Prawdziwość wzorów (10)–(12) potwierdzili wiele lat później L.J. Rogers (1921) i G.N. Watson (1929).

W lutym 1913 r., wspierając się opinią J.E. Littlewooda, Hardy zyskał pewność – Ramanujan jest matematycznym geniuszem!

Część 2. Dla ciekawych

W 1914 r. Ramanujan, zgodnie ze swoim zwyczajem, podał bez uzasadnienia wzór

$$\frac{1}{\pi} = \frac{\sqrt{8}}{9801} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4k)!(1103 + 26390 \cdot k)}{(k!)^4 \cdot 396^{4k}}$$

Wzór okazał się prawdziwy i zapoczątkował prace nad ciągami szybko zbieżnymi do wartości π (patrz [1]).

Najcenniejszym efektem współpracy Hardy’ego i Ramanujana, podczas jego pobytu w Trinity College w Cambridge, jest wzór z 1918 r. na przybliżoną wartość funkcji rozkładu $p(n)$ (patrz [2]). Liczba $p(n)$ określa, na ile sposobów można przedstawić liczbę naturalną w postaci różnych sum liczb naturalnych. Ponieważ

$$4 = 4 = 1 + 1 + 1 + 1 = 2 + 1 + 1 = 2 + 2 = 3 + 1,$$

więc $p(4) = 5$. Możemy sprawdzić, że $p(10) = 42$ i $p(n)$ szybko rośnie ze wzrostem n . Nikt nie miał jednak pomysłu na oszacowanie wartości funkcji $p(n)$. Hardy i Ramanujan wykazali zaskakującą zależność

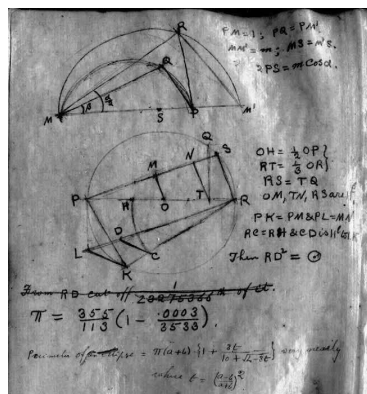
$$p(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}} \cdot e^{\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}},$$

co oznacza, że stosunek prawej i lewej strony dąży do 1, gdy $n \rightarrow \infty$. Liczba π była bohaterką wielu rozważań Ramanujana. Przed 1913 r., korzystając jedynie z twierdzenia Talesa i twierdzenia Pitagorasa, Ramanujan podał zaskakująco dokładne przybliżone rozwiązania kwadratury koła [3] i rektyfikacji okręgu [4].

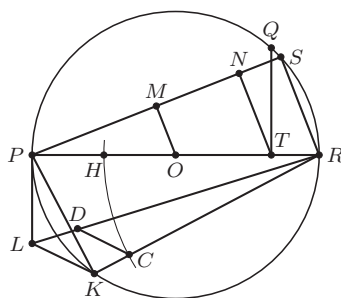
Konstrukcja 1 (Kwadratura koła według Ramanujana)

Pomysł uwidoczniiony jest na 54 stronie zachowanych rękopisów Ramanujana, „Manuscript Book 1 of Srinivasa Ramanujan”.

Niech PR będzie średnicą okręgu jednostkowego o środku w punkcie O (rys. 1). Niech H połowi odcinek OP , a odcinek RT ma długość $\frac{1}{3}$. Kreślimy odcinek $TQ \perp PR$, i odkładamy taką cięciwę RS , że $|RS| = |TQ| = \frac{\sqrt{5}}{3}$. Odcinek PS ma długość $\frac{\sqrt{31}}{3}$. Kreślimy odcinki $TN \parallel OM \parallel RS$ i obliczamy $|PM| = \frac{1}{2}|PS| = \frac{\sqrt{31}}{6}$, $|MN| = \frac{\sqrt{31}}{9}$. Rysujemy cięciwę PK o długości $|PK| = |PM|$ i w punkcie P wystawiamy styczną do okręgu PL . Mamy $|PL| = |MN| = \frac{\sqrt{31}}{9}$. Na boku RK o długości $\frac{\sqrt{113}}{6}$ odkładamy taki odcinek RC , że $|RC| = |RH| = \frac{3}{2}$, a następnie rysujemy odcinek $CD \parallel KL$.



Strona 54 z „Manuscript Book 1 of Srinivasa Ramanujan”.



Rys. 1

Z twierdzenia Talesa, $\frac{|RC|}{|RK|} = \frac{|RD|}{|RL|}$, więc $|RD| = \sqrt{\frac{355}{113}}$. Wówczas kwadrat o boku RD ma pole bliskie polu koła jednostkowego,

$$|RD|^2 = \frac{355}{113} \approx 3,1415929203\dots,$$

jest przybliżeniem liczby π z dokładnością do szóstego miejsca po przecinku.

Ramanujan w swoich obliczeniach korzystał (co widać na reprodukcji) z lepszego przybliżenia liczby π w postaci $\frac{355}{113}(1 - \frac{0,0003}{3533})$, które jest dokładne do czternastego miejsca po przecinku.

Ułamek $\frac{355}{113}$ jako przybliżenie wartości π został wskazany już w V wieku przez chińskiego astronoma Tsu Ch'ung-chih (430–501). Tysiąc lat później, w 1573 roku ponownie odkrył to przybliżenie Valentinus Otho (1545–1603) oraz w 1585 roku holenderski matematyk Adriaen Anthonisz (1527–1607).

Konstrukcja 2 (Rektyfikacja okręgu według Ramanujana)

Niech AB będzie średnicą okręgu jednostkowego o środku w punkcie O . Niech punkt C dzieli łuk ACB na połowę i odcinek AT ma długość $\frac{1}{3}$ (rys. 2). Na odcinku BC odkładamy odcinki $|CM| = |MN| = \frac{1}{3}$. Łączymy punkty AM i AN , $|AM| = \frac{\sqrt{19}}{3}$, $|AN| = \frac{\sqrt{22}}{3}$, i na odcinku AN odkładamy taki odcinek AP , że $|AP| = |AM|$. Kreślimy odcinek $PQ \parallel NM$. Z twierdzenia Talesa uzyskujemy $\frac{|AQ|}{|AM|} = \frac{|AP|}{|AN|}$, więc $|AQ| = \frac{19}{3\sqrt{22}}$. Łączymy O z Q i z punktu T prowadzimy równoległą do OQ , która przecina odcinek AM w punkcie R . Wówczas, $|AR| = \frac{1}{3}|AQ| = \frac{19}{9\sqrt{22}}$. W punkcie A kreślimy styczną do okręgu i odkładamy taki odcinek AS , że $|AS| = |AR| = \frac{19}{9\sqrt{22}}$. Wtedy odcinek OS ma długość

$|OS| = \sqrt{1 + \frac{19^2}{9^2 \cdot 22}}$. Średnia proporcjonalna (geometryczna) między odcinkami $|OS|$ i $|OB|$, czyli odcinek OU (rys. 3), jest równa w przybliżeniu szóstej części długości okręgu, gdyż

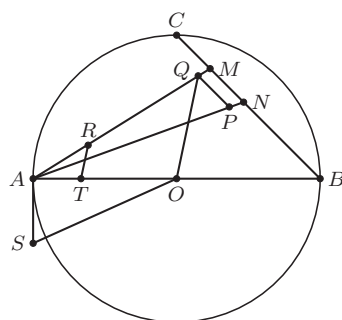
$$3\sqrt{1 \cdot \sqrt{1 + \frac{19^2}{9^2 \cdot 22}}} = \left(9^2 + \frac{19^2}{22}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{2143}{22}\right)^{\frac{1}{4}} = 3,1415926525826\dots,$$

co jest przybliżeniem wartości π z dokładnością do ośmiu cyfr po przecinku.

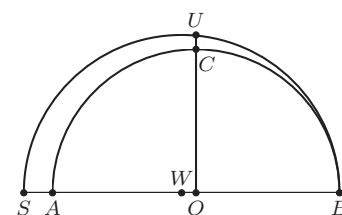
Ułamek $\frac{2143}{22}$ otrzymamy, przyjmując przybliżenie $\pi^4 \approx 97,4(09)$.

Literatura

- [1] J.M. Borwein, P.B. Borwein, D.H. Bailey: Ramanujan, modular equations, and approximations to pi or how to compute one billion digits of pi, *Amer. Math. Monthly* 96 (1989), 201–219.
- [2] G.H. Hardy: *Ramanujan. Twelve lectures on subjects suggested by his life and work*, Cambridge Univ. Press, London 1940.
- [3] S. Ramanujan: Squaring the circle, *J. Indian Math.* 5 (1913), 132.
- [4] S. Ramanujan: Modular equations and approximations to pi, *Quart. J. Math.* 45 (1914), 350–372.



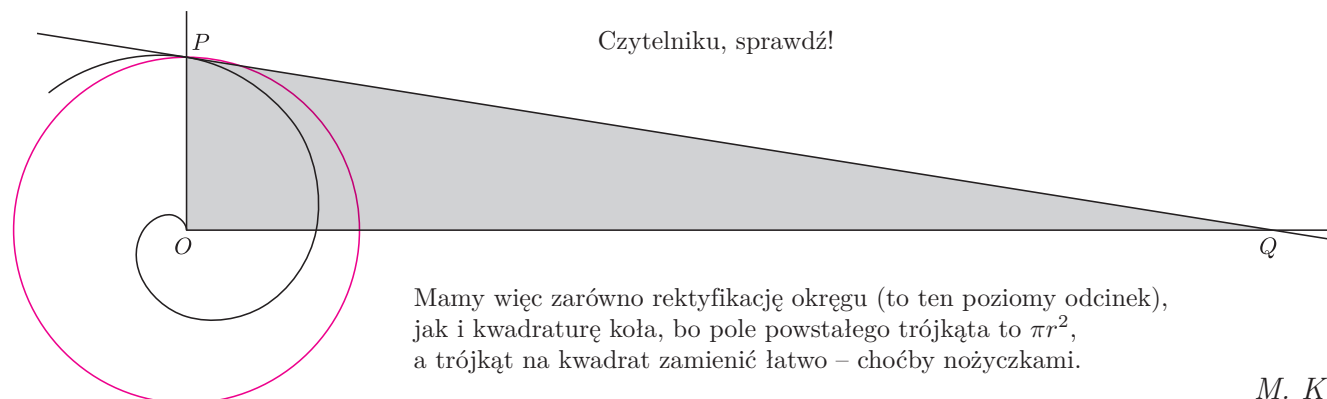
Rys. 2



Rys. 3

Zainteresowanym postacią Srinivasa Ramanujana polecamy książkę Roberta Kanigela *Człowiek który poznał nieskończoność*, której recenzję można znaleźć w Δ_{17}^9 .

Archimedes rektyfikację okręgu i kwadraturę koła wykonał za pomocą swojej spirali, czyli krzywej opisanej w układzie biegunowym przez $r(\varphi) = a \cdot \varphi$. Jeśli odcinek OP , łączący punkt spirali odpowiadający 2π z jej początkiem, będzie miał długość r , to styczna do spirali w tym punkcie przetnie wychodzącą z O półprostą prostopadłą do OP w takim punkcie Q , że $|OQ| = 2\pi r$.



Mamy więc zarówno rektyfikację okręgu (to ten poziomy odcinek), jak i kwadraturę koła, bo pole powstałego trójkąta to πr^2 , a trójkąt na kwadrat zamienić łatwo – choćby nożyczkami.

M. K.