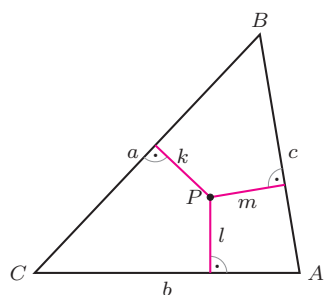
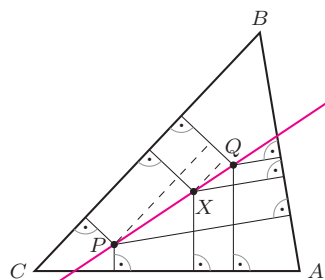


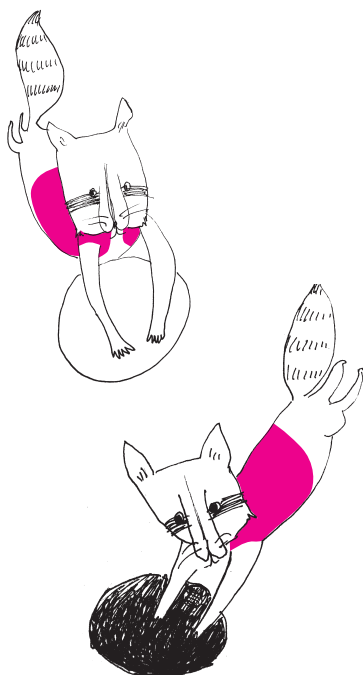
Funkcja m zmiennych jest jednorodna w stopniu k , gdy spełnia warunek $f(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_m) = \lambda^k f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ dla dowolnego λ i dowolnych x_1, x_2, \dots, x_m ze swojej dziedziny; np. funkcja $x^\pi \sin(y/x) + y^\pi \sin(x/y)$ jest jednorodna w stopniu π . Funkcja jest gładka w stopniu k , gdy ma k ciągłych pochodnych.



Rys. 1



Rys. 2



Geometry od dawna marzyli o współrzędnych jednorodnych, czyli takich n -tkach liczb (dalej dla uproszczenia będzie mowa o parach i trójkach) przyporządkowanych punktom, że gdy wszystkie liczby w n -tce pomnożymy przez tę samą liczbę, to nowa n -tka będzie współrzędnymi tego samego punktu.

Traci się w ten sposób jednoznaczność współrzędnych danego punktu, ale zyskuje się to, że wszelkie sytuacje geometryczne będą opisywane wyłącznie funkcjami jednorodnymi. To wielka wygoda, bo okazuje się, że dla k naturalnych

funkcja jednorodna w stopniu k i gładka w stopniu k to zawsze wielomian.

Dowód tego faktu jest bardzo prosty (Euler), ale wymaga – rzecz jasna – użycia pojęcia pochodnej, więc go pominię.

Aby ten cel osiągnąć, Julius Plücker zaproponował **współrzędne trójkątowe** zwane też **trójliniowymi**.

Jak się łatwo domyślić, potrzebny jest w tym celu trójkąt, ale trójkąt, w którym dysponujemy całymi prostymi zawierającymi jego boki. Współrzędne punktu to będą odległości od tych prostych, przy czym odległość będziemy brali ze znakiem „+”, gdy punkt leży po tej samej stronie prostej, co nieleżący na niej wierzchołek trójkąta, i ze znakiem „-” w przeciwnym przypadku.

Jak widać, na rysunku 1 punkt P ma wszystkie współrzędne dodatnie. Takimi też będą się posługiwał, pozostawiając Czytelnikowi (łatwe) rozpatrzenie innych przypadków.

Oznaczmy pole trójkąta ABC przez $\frac{1}{2}\Delta$. Współrzędnymi P jest więc trójka (k, l, m) . Zauważmy też, że

$$a \cdot k + b \cdot l + c \cdot m = \Delta.$$

To proste spostrzeżenie pozwala potwierdzić, że współrzędne te są faktycznie jednorodne, bo jednostki miar długości czy pola możemy dobrać dowolnie.

Zaletą dodatkową współrzędnych trójkątowych jest to, iż proste mają w tych współrzędnych równania liniowe. Sprawdźmy to.

Niech współrzędnymi P będzie trójka (k, l, m) , a współrzędnymi Q trójka (p, q, r) . Znajdźmy warunek na to, by punkt X o współrzędnych (x, y, z) leżał na prostej PQ .

$$\text{Z rysunku 2 mamy } \frac{x-k}{p-k} = \frac{PX}{PQ}. \text{ Podobnie } \frac{y-l}{q-l} = \frac{PX}{PQ} = \frac{z-m}{r-m}.$$

Teraz potrzebna nam będzie trójka (α, β, γ) spełniająca dwa warunki

$$\alpha \cdot k + \beta \cdot l + \gamma \cdot m = 0 \quad \text{ i } \quad \alpha \cdot p + \beta \cdot q + \gamma \cdot r = 0.$$

Takie warunki użytkownicy algebry liniowej nazywają znikaniem iloczynu skalarnego, a poszukiwana trójka to dla nich iloczyn wektorowy. Nie trzeba jednak tych pojęć znać, by sprawdzić poprawność zgadniętej odpowiedzi.

Taką trójką jest $(\alpha, \beta, \gamma) = (lr - mq, mp - kr, kq - lp)$. Z udowodnionych wyżej proporcji mamy więc $\alpha(x-k) + \beta(y-l) + \gamma(z-m) = 0$, a na koniec $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ – i takie jest równanie prostej PQ .

Bardzo ładnie, ale co z tego za pożytek?

Aby go zobaczyć, trzeba spojrzeć na to oczyma kolegi Plückera (to nie żart: byli rówieśnikami i bliskimi znajomymi), Ferdinanda Möbiusa.

Möbius postanowił zamiast korzystać z boków trójkąta skorzystać z jego wierzchołków. Co więcej, odwołał się do fizyki, a konkretnie użył środków ciężkości. Już od czasów Archimedesusa wiadomo, że grawitacja działa tak „w dół”, jak „do góry” (balony, statki na wodzie). Dlatego mamy do czynienia z ciężarami i wyporami, co w szkolnej fizyce prowadzi do pojęcia dźwigni jedno- bądź dwustronnej.

Gdy obciążymy dwa punkty A i B , to ich środek ciężkości może wypaść w dowolnym punkcie prostej AB . Dokładniej – obowiązuje zasada „ramię razy siła”, czyli gdy w punkcie A umieścimy ciężar/wypór m_A , a m_B w punkcie B , wówczas środek ciężkości będzie spełniał warunek $\vec{AS} \cdot m_A + \vec{BS} \cdot m_B = 0$. Możemy parę (m_A, m_B) uznać za współrzędne punktu S na prostej AB . Takie współrzędne Möbius nazwał **współzrędnymi barycentrycznymi**. Czytelnik zechce sprawdzić, że współrzędne punktów na poniższym rysunku



mogą być następujące: $P = (2, -1)$, $Q = (1, 3)$, $R = (-3, 5)$. Mogą, bo współrzędne barycentryczne są jednorodnie – przecież obciążać punkty możemy równie dobrze w gramach, jak w tonach.

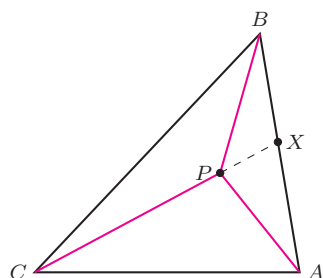
Aby wprowadzić współrzędne barycentryczne na płaszczyźnie, trzeba na niej wskazać odpowiednik zasady „ramię razy siła”. A oto i on

Jeśli środkiem ciężkości (A, m_A) , (B, m_B) , (C, m_C) jest punkt P , to $m_A : m_B : m_C = \Delta_{BCP} : \Delta_{CAP} : \Delta_{ABP}$, gdzie Δ_{XYZ} to pole trójkąta XYZ .

Rzeczywiście, mamy bowiem (rys. 3)

$$\frac{m_A}{m_B} = \frac{XB}{AX} = \frac{\Delta_{BCX}}{\Delta_{ACX}} = \frac{\Delta_{BCX}}{\Delta_{AXP}} = \frac{\Delta_{BCX} - \Delta_{BPX}}{\Delta_{ACX} - \Delta_{AXP}} = \frac{\Delta_{BCP}}{\Delta_{ACP}} = \frac{\Delta_{BCP}}{\Delta_{CAP}}.$$

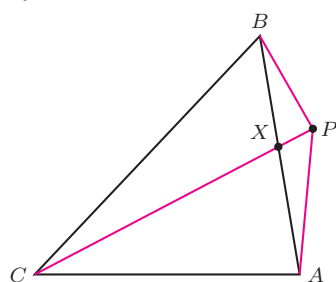
Równość pozostałych stosunków uzasadniamy analogicznie.



Rys. 3

Kolejność wierzchołków przy „deltach” jest pomyślana tak, by rachunek przebiegał równie dobrze dla punktów leżących poza wnętrzem trójkąta ABC (rys. 4) – trzeba tylko zamienić pojęcie pola na pojęcie pola zorientowanego, czyli wyróżnić jeden sposób obiegania wierzchołków trójkąta (np. „zgodnie z ruchem wskazówek zegara”, czyli ruchem Słońca na naszym niebie) i uznać pola obiegane w ten sposób za dodatnie, a pozostałe za ujemne.

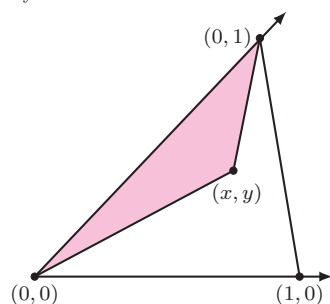
Teraz obciążenia wierzchołków trójkąta odpowiadające punktowi P możemy uznać za jego współrzędne barycentryczne.



Rys. 4

I tu warto porównać rysunek 1 i 3 – przecież w obu zainteresowanie skoncentrowane jest na polach trójkątów APB , BPC , CPA . Po chwili zastanowienia dochodzimy do wniosku, że Plücker i Möbius wymyślili to samo, a tylko inaczej na to spojrzeli.

Co więcej, wymyślone przez nich współrzędne są w doskonałej zgodności ze zwykłymi współzrędnymi kartezjańskimi. Uzasadnienie tego jest na rysunku 5.



Rys. 5

Punkty A, B, C potraktujmy jak wyznaczające kartezjański układ współzrędnych punkty $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(0, 0)$. Rozpatrzmy, jak trzeba obciążyć te punkty, by środek ciężkości wypadł w punkcie o kartezjańskich współzrędnym (x, y) . Ze współzrędnym barycentrycznym tego punktu wybierzmy te, które sumują się do 1 (wystarczy podzielić każdą ze współzrędnym przez ich sumę – o ile jest niezerowa) – takie szczególne współzrędnym nazywają się **arealne**. Czytelnik z łatwością zauważy, że obciążenie punktu $(1, 0)$ to właśnie będzie x . Podobnie $(0, 1)$ należy obciążyć ciężarem/wyporem y . No, a $(0, 0)$? Oczywiście, $1 - x - y$, bo to współzrędnym arealne, czyli sumujące się do 1.

Dziś monografia Plückera *Analytisch-geometrische Entwicklungen* jest praktycznie zapomniana, natomiast dzieło Möbiusa *Der barycentrische Calcül* cieszy się znacznym szacunkiem. Powód jest niebagatelny, a da się pokazać już w przypadku współzrędnym na prostej: punktu o współzrędnym barycentrycznym $(1, -1)$ na prostej nie ma! Bo gdy znaki są różne, punkt leży poza odcinkiem AB z tej strony, z której wartość bezwzględna obciążenia jest większa (proszę porównać z rysunkiem na górze strony!), a tutaj... Podobnie nie ma na płaszczyźnie punktów, których suma współzrędnym barycentrycznym znika.

I Möbius zaproponował, by płaszczyznę (prostą, przestrzeń) uzupełnić o te punkty. I tak wskazał, że jego współzrędnym stosują się także w geometrii rzutowej (bo tak nazywają się pouzupełniane w ten sposób przestrzenie różnego wymiaru), a **geometria rzutowa to**, jak za Cayleyem mówią do dziś geometry, **cała geometria**.

O współzrędnym barycentrycznym można więcej przeczytać w moim artykule *Co mogą nam dać ciężary i wypory?*, Δ_{12}^3 , a o geometrii rzutowej w *Dziewięć twarzy płaszczyzny rzutowej*, Δ_{13}^5 .