



Rozwiązanie zadania M 1560.

Odpowiedź: $n^{n/2}$.

Dla $k = 0, 1, \dots, n-1$ oraz $\epsilon = e^{2\pi i/n}$ niech $a_k = \epsilon^k$. Wówczas liczby a_k wyznaczają na płaszczyźnie zespolonej n -kąć foremny wpisany w okrąg o promieniu 1.

Zauważmy, że wielomiany

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n-1} z^k \quad \text{oraz} \quad g(z) = \prod_{k=0}^{n-1} (z - a_k)$$

stopnia $n-1$ mają równe współczynniki przy najwyższej potędze z oraz $n-1$ wspólnych pierwiastków zespolonych, mianowicie $z = a^k$ dla $k = 1, 2, \dots, n-1$ (ze względu na równość

$$f(z) = (1 - z^n)/(1 - z) \quad \text{dla} \quad z \neq 1.$$

Stąd wynika, że wielomiany f i g są równe, w szczególności

$$\prod_{k=1}^{n-1} (1 - a_k) = g(1) = f(1) = n,$$

a zatem

$$\prod_{k=1}^{n-1} |a_0 - a_k| = n.$$

Powyższa równość oznacza, że iloczyn długości boków i przekątnych zawierających wierzchołek a_0 rozważanego wielokąta (czyli, z uwagi na symetrię, dowolny ustalony wierzchołek) jest równa n . Wobec tego

$$\prod_{i < j} |a_i - a_j| = \left(\prod_{i \neq j} |a_i - a_j| \right)^{1/2} = n^{n/2}.$$



Rozwiązanie zadania M 1558.

Wykażemy, że takie liczby nie istnieją. Przypuśćmy nie wprost, że trójka (a, b, c) ma opisaną własność. Wówczas trójka $(-a-1, -b-1, -c-1)$ również ją ma, więc możemy bez straty ogólności założyć, że a jest liczbą parzystą.

Jeżeli x_1, x_2 są całkowitymi pierwiastkami trójmianu $ax^2 + bx + c$, to liczby $-\frac{b}{a} = x_1 + x_2$ oraz $\frac{c}{a} = x_1 x_2$ są całkowite, co wobec parzystości a oznacza, że liczby b oraz c również są parzyste.

Tymczasem jeżeli $a = 2k, b = 2\ell, c = 2m$ dla całkowitych k, ℓ, m , to wyróżnik trójmianu $(a+1)x^2 + (b+1)x + (c+1)$, równy

$$(b+1)^2 - 4(a+1)(c+1) = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}k(k+1) - 2\ell m - \ell - m \right) - 3,$$

daje resztę 5 przy dzieleniu przez 8, co oznacza, że nie może być kwadratem liczby całkowitej. Uzyskana sprzeczność kończy dowód.

Prosto z nieba: Szybka wizyta

Przestrzeń międzyplanetarna jest pełna mniejszych lub większych ciał – komet i asteroid – poruszających się względem Ziemi i potencjalnie jej zagrażających. Dane NEO Coordination Centre (*Near-Earth Objects*, obiektów bliskich Ziemi) Europejskiej Agencji Kosmicznej zawierają parametry orbit około 15 tys. obiektów NEO (w tym ponad 100 komet), z czego ponad 500 jest sklasyfikowanych jako obiekty o niezerowym prawdopodobieństwie kolizji z Ziemią. Rzecz jasna, wciąż odkrywano nowe obiekty. Niedawno zarejestrowano NEO nowego rodzaju.

Bolid oznaczony numerem A/2017 U1 nadleciał z kierunku gwiazdozbioru Lutni z prędkością 25,5 km/s, zbliżając się do Układu Słonecznego po trajektorii niemal prostopadłej do ekliptyki (płaszczyzny, w której znajduje się orbita Ziemi, i w przybliżeniu także orbity innych planet i planetoid w naszym układzie). 2 września 2017 roku obiekt o rozmiarze około 400 metrów przekroczył płaszczyznę ekliptyki w okolicy orbity Merkurego, a najbliżej Słońca znalazł się w dniu 9 września. A/2017 U1 został formalnie odkryty 19 października przez zespół pracujący na teleskopie Pan-STARRS (*Panoramic Survey Telescope and Rapid Response System*) Uniwersytetu Hawajskiego w Haleakali, podczas rutynowego przeglądu nieba w poszukiwaniu obiektów bliskich Ziemi.

W czasie przelotu przez Układ Słoneczny A/2017 U1 nie znalazł się niebezpiecznie blisko żadnej z ośmiu głównych planet. Po przejściu przez płaszczyznę ekliptyki i ugięciu toru ruchu w polu grawitacyjnym Słońca, tajemnicze ciało znalazło się 14 października w odległości około 24 milionów km od Ziemi (około 60 razy większej niż odległość do Księżyca). Obecnie oddala się od Słońca z prędkością około 44 km/s, poruszając się w kierunku gwiazdozbioru Pegaza.

Od dawna przypuszczano, że asteroidy lub komety przemieszczające się między gwiazdami i czasami przechodzące w pobliżu układów planetarnych muszą pojawiać się także i w naszym Układzie Słonecznym i przenosić między planetami zarodek życia (hipoteza panspermii). Jak dotąd wszystko – a w szczególności prędkość ruchu większa od prędkości ucieczki z Układu Słonecznego – wskazuje, że A/2017 U1 to pierwszy tego typu obiekt międzygwiazdny w naszym Układzie. Zbierane w trakcie jego krótkiej wizyty dane mają to ostatecznie potwierdzić i ustalić więcej informacji o pochodzeniu i składzie obiektu.

Michał BEJGER

Niebo w marcu

Do końca marca wysokość Słońca w południe zwiększy się jeszcze wyraźniej niż w lutym – o ponad 11° i w tym czasie długość dnia urośnie o kolejne 2 godziny, do prawie 13 godzin. 20 marca, o godzinie 17:15 naszego czasu Słońce przekroczy równik niebieski w drodze na północ i tym samym na północnej półkuli Ziemi zacznie się astronomiczna wiosna. Ze względu na refrakcję atmosferyczną do faktycznej równonocy dojdzie trzy dni wcześniej. Pierwszy dzień wiosny to również środek procesu wydłużania się dnia i skracania nocy. Potrwa on jeszcze kolejne trzy miesiące, do przesilenia letniego (w tym roku 21 czerwca). W nocy z soboty 24 marca na niedzielę 25 marca zacznie obowiązywać czas letni.

W lutym nie było pełni Księżyca, za to w marcu Srebrny Glob przejdzie przez tę fazę dwukrotnie. Miesiąc zacznie się właśnie pełnią Księżyca, przypadającą rankiem drugiego marca. 9 marca Srebrny Glob przejdzie przez ostatnią kwadrę, 17 marca – przez now, 24 marca – przez I kwadrę i 31 marca – ponownie przez