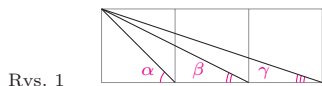


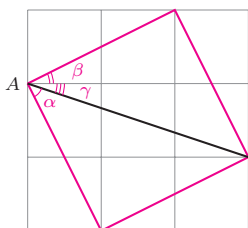
W wielu zadaniach, w których występują kąty lub ich sumy, przydatne bywa przeniesienie pewnych figur tak, by kąty te znalazły się obok siebie. Szczególnie wygodne jest to wtedy, gdy suma pewnych kątów równa jest np.  $90^\circ$  lub  $360^\circ$ , a także, gdy niektóre z danych odcinków są równej długości.

1. Dane są trzy kwadraty, ustawione jak na rysunku 1. Oblicz  $\alpha + \beta + \gamma$ .



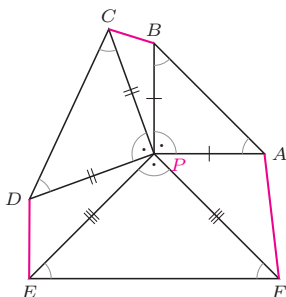
Rys. 1

2. Wewnątrz sześciokąta wypukłego  $ABCDEF$  leży taki punkt  $P$ , że spełnione są równości  $\sphericalangle ABP = \sphericalangle BAP = \sphericalangle CDP = \sphericalangle DCP = \sphericalangle EFP = \sphericalangle FEP = 45^\circ$ . Udowodnij, że suma długości odcinków  $BC$ ,  $DE$  i  $FA$  jest nie mniejsza od każdego z odcinków  $AB$ ,  $CD$  i  $EF$ .



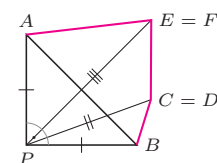
Rys. 2

3. Dany jest pięciokąt wypukły  $ABCDE$ , w którym  $BC = CD$ ,  $DE = EA$ ,  $\sphericalangle BCD = \sphericalangle DEA = 90^\circ$ . Udowodnij, że z odcinków o długościach  $AC$ ,  $CE$ ,  $EB$  można zbudować trójkąt. Wyznacz miary jego kątów, znając miarę  $\alpha$  kąta  $ACE$  i miarę  $\beta$  kąta  $BEC$ .



Rys. 3

4. W sześciokącie wypukłym  $ABCDEF$  wszystkie boki są równej długości oraz  $\sphericalangle A + \sphericalangle C + \sphericalangle E = \sphericalangle B + \sphericalangle D + \sphericalangle F$ . Udowodnij, że przekątne  $AD$ ,  $BE$  i  $CF$  przecinają się w jednym punkcie.



Rys. 4

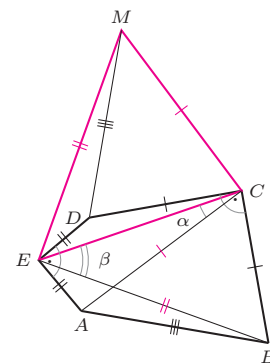
Rozwiązania

**R1.** Kolorowy czworokąt na rysunku 2 jest kwadratem, gdyż jego boki są przekątnymi prostokątów o wymiarach  $2 \times 1$ , na przemian „pionowych” i „poziomych”. Przy wierzchołku  $A$  schodzą się kąty  $\alpha, \beta, \gamma$  z treści zadania: między odpowiednimi bokami a przekątnymi w kolorowym kwadracie i w prostokątach  $2 \times 1$  oraz  $3 \times 1$ . Stąd  $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$ .  $\square$

**R2.** Z równości kątów w treści zadania wynika, że trójkąty  $APB$ ,  $CPD$ ,  $EPF$  są prostokątne równoramienne (rys. 3). Stąd  $AP = BP$ ,  $CP = DP$ ,  $EP = FP$  oraz  $\sphericalangle BPC + \sphericalangle DPE + \sphericalangle FPA = 360^\circ - 3 \cdot 90^\circ = 90^\circ$ .

Wobec tego trójkąty  $BPC$ ,  $DPE$ ,  $FPA$  oraz odbity symetrycznie trójkąt prostokątny równoramienny  $APB$  można ustawić jak na rysunku 4. Kolorowa łamana ma wówczas długość  $BC + DE + FA$ , nie mniejszą od odcinka  $AB$  łączącego jej końce. Dowód dla odcinków  $CD$  i  $EF$  przebiega analogicznie.  $\square$

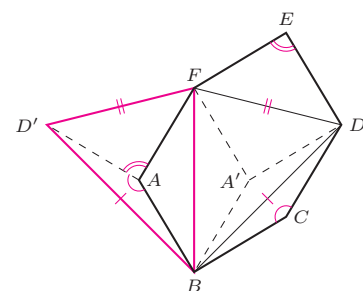
**R3.** Suma kątów wewnętrznych pięciokąta to  $540^\circ$ , więc z założenia wnioskujemy, że w rozważanym pięciokącie  $\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle D = 540^\circ - 2 \cdot 90^\circ = 360^\circ$ . Stąd i z danych równości boków wynika, że z trójkątów  $EAB$ ,  $ABC$  i  $CDE$  można złożyć trójkąt  $CEM$  tak jak na rysunku 5, o bokach żądanej długości:  $MC = AC$ ,  $CE$ ,  $EM = EB$ .



Rys. 5

Ponadto skoro  $\sphericalangle BCD = 90^\circ$ , to także  $\sphericalangle ACM = 90^\circ$  (gdyż kąty  $ACB$  i  $MCD$  są przystające), a więc  $\sphericalangle ECM = 90^\circ - \alpha$ . Analogicznie  $\sphericalangle CEM = 90^\circ - \beta$  i wobec tego  $\sphericalangle CME = 180^\circ - \sphericalangle ECM - \sphericalangle CEM = \alpha + \beta$ .  $\square$

**R4.** Suma kątów wewnętrznych sześciokąta to  $720^\circ$ , więc z założenia wnioskujemy, że  $\sphericalangle A + \sphericalangle C + \sphericalangle E = 360^\circ$ . Stąd i z równości wszystkich boków sześciokąta wynika, że z trójkątów równoramiennych  $FAB$ ,  $BCD$ ,  $DEF$  można złożyć trójkąt  $BFD'$  w sposób przedstawiony na rysunku 6.



Rys. 6

Trójkąty  $BFD'$  i  $BFD$  są przystające (gdyż mają równe odpowiednie boki) oraz symetryczne względem prostej  $BF$ . Niech  $A'$  będzie obrazem punktu  $A$  w tej symetrii. Wówczas odcinki  $A'D$ ,  $A'B$ ,  $A'F$  mają długości równe bokom sześciokąta.

Stąd czworokąty  $FABA'$ ,  $BCDA'$ ,  $DEFA'$  są rombami, a więc  $ABDE$  jest równoległobokiem (bo odcinki  $AB$  i  $DE$  są równe i równoległe). Wobec tego przekątne  $AD$  i  $BE$  mają wspólny środek. Analogicznie przekątne  $AD$  i  $CF$  mają wspólny środek, co kończy dowód.  $\square$

Zadanie 1 rozwiązano inaczej w deltoidzie 5/2009. Zadanie 2 pochodzi z książki W. Pompe Wokół obrotów (Wyd. Szkolne Omega, 2016). Zadania 3 i 4 pochodzą z LVIII i LV Olimpiady Matematycznej.