



### Rozwiązanie zadania M 1560.

Odpowiedź:  $n^{n/2}$ .

Dla  $k = 0, 1, \dots, n-1$  oraz  $\epsilon = e^{2i\pi/n}$  niech  $a_k = \epsilon^k$ . Wówczas liczby  $a_k$  wyznaczają na płaszczyźnie zespolonej  $n$ -kąć foremny wpisany w okrąg o promieniu 1.

Zauważmy, że wielomiany

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n-1} z^k \quad \text{oraz} \quad g(z) = \prod_{k=0}^{n-1} (z - a_k)$$

stopnia  $n-1$  mają równe współczynniki przy najwyższej potędze  $z$  oraz  $n-1$  wspólnych pierwiastków zespolonych, mianowicie  $z = a^k$  dla  $k = 1, 2, \dots, n-1$  (ze względu na równość

$$f(z) = (1 - z^n)/(1 - z) \quad \text{dla} \quad z \neq 1.$$

Stąd wynika, że wielomiany  $f$  i  $g$  są równe, w szczególności

$$\prod_{k=1}^{n-1} (1 - a_k) = g(1) = f(1) = n,$$

a zatem

$$\prod_{k=1}^{n-1} |a_0 - a_k| = n.$$

Powyższa równość oznacza, że iloczyn długości boków i przekątnych zawierających wierzchołek  $a_0$  rozważanego wielokąta (czyli, z uwagi na symetrię, dowolny ustalony wierzchołek) jest równa  $n$ . Wobec tego

$$\prod_{i < j} |a_i - a_j| = \left( \prod_{i \neq j} |a_i - a_j| \right)^{1/2} = n^{n/2}.$$



### Rozwiązanie zadania M 1558.

Wykażemy, że takie liczby nie istnieją. Przypuśćmy nie wprost, że trójka  $(a, b, c)$  ma opisaną własność. Wówczas trójka  $(-a-1, -b-1, -c-1)$  również ją ma, więc możemy bez straty ogólności założyć, że  $a$  jest liczbą parzystą.

Jeżeli  $x_1, x_2$  są całkowitymi pierwiastkami trójmianu  $ax^2 + bx + c$ , to liczby  $-\frac{b}{a} = x_1 + x_2$  oraz  $\frac{c}{a} = x_1 x_2$  są całkowite, co wobec parzystości  $a$  oznacza, że liczby  $b$  oraz  $c$  również są parzyste.

Tymczasem jeżeli  $a = 2k, b = 2\ell, c = 2m$  dla całkowitych  $k, \ell, m$ , to wyróżnik trójmianu  $(a+1)x^2 + (b+1)x + (c+1)$ , równy

$$(b+1)^2 - 4(a+1)(c+1) = 8 \cdot \left( \frac{1}{2}k(k+1) - 2\ell m - \ell - m \right) - 3,$$

daje resztę 5 przy dzieleniu przez 8, co oznacza, że nie może być kwadratem liczby całkowitej. Uzyskana sprzeczność kończy dowód.

## Prosto z nieba: Szybka wizyta

Przestrzeń międzyplanetarna jest pełna mniejszych lub większych ciał – komet i asteroid – poruszających się względem Ziemi i potencjalnie jej zagrażających. Dane NEO Coordination Centre (*Near-Earth Objects*, obiektów bliskich Ziemi) Europejskiej Agencji Kosmicznej zawierają parametry orbit około 15 tys. obiektów NEO (w tym ponad 100 komet), z czego ponad 500 jest sklasyfikowanych jako obiekty o niezerowym prawdopodobieństwie kolizji z Ziemią. Rzecz jasna, wciąż odkrywane są nowe obiekty. Niedawno zarejestrowano NEO nowego rodzaju.

Bolid oznaczony numerem A/2017 U1 nadleciał z kierunku gwiazdozbioru Lutni z prędkością 25,5 km/s, zbliżając się do Układu Słonecznego po trajektorii niemal prostopadłej do ekliptyki (płaszczyzny, w której znajduje się orbita Ziemi, i w przybliżeniu także orbity innych planet i planetoid w naszym układzie).

2 września 2017 roku obiekt o rozmiarze około 400 metrów przekroczył płaszczyznę ekliptyki w okolicy orbity Merkurego, a najbliżej Słońca znalazł się w dniu 9 września. A/2017 U1 został formalnie odkryty 19 października przez zespół pracujący na teleskopie Pan-STARRS (*Panoramic Survey Telescope and Rapid Response System*) Uniwersytetu Hawajskiego w Haleakali, podczas rutynowego przeglądu nieba w poszukiwaniu obiektów bliskich Ziemi.

W czasie przelotu przez Układ Słoneczny A/2017 U1 nie znalazł się niebezpiecznie blisko żadnej z ośmiu głównych planet. Po przejściu przez płaszczyznę ekliptyki i ugięciu toru ruchu w polu grawitacyjnym Słońca, tajemnicze ciało znalazło się 14 października w odległości około 24 milionów km od Ziemi (około 60 razy większej niż odległość do Księżyca). Obecnie oddala się od Słońca z prędkością około 44 km/s, poruszając się w kierunku gwiazdozbioru Pegaza.

Od dawna przypuszczano, że asteroidy lub komety przemieszczające się między gwiazdami i czasami przechodzące w pobliżu układów planetarnych muszą pojawiać się także i w naszym Układzie Słonecznym i przenosić między planetami zarodek życia (hipoteza panspermii). Jak dotąd wszystko – a w szczególności prędkość ruchu większa od prędkości ucieczki z Układu Słonecznego – wskazuje, że A/2017 U1 to pierwszy tego typu obiekt międzygwiazdny w naszym Układzie. Zbierane w trakcie jego krótkiej wizyty dane mają to ostatecznie potwierdzić i ustalić więcej informacji o pochodzeniu i składzie obiektu.

Michał BEJGER

## Niebo w marcu

Do końca marca wysokość Słońca w południe zwiększy się jeszcze wyraźniej niż w lutym – o ponad  $11^\circ$  i w tym czasie długość dnia urośnie o kolejne 2 godziny, do prawie 13 godzin. 20 marca, o godzinie 17:15 naszego czasu Słońce przekroczy równik niebieski w drodze na północ i tym samym na północnej półkuli Ziemi zacznie się astronomiczna wiosna. Ze względu na refrakcję atmosferyczną do faktycznej równonocy dojdzie trzy dni wcześniej. Pierwszy dzień wiosny to również środek procesu wydłużania się dnia i skracania nocy. Potrwa on jeszcze kolejne trzy miesiące, do przesilenia letniego (w tym roku 21 czerwca). W nocy z soboty 24 marca na niedzielę 25 marca zacznie obowiązywać czas letni.

W lutym nie było pełni Księżyca, za to w marcu Srebrny Glob przejdzie przez tę fazę dwukrotnie. Miesiąc zacznie się właśnie pełnią Księżyca, przypadającą rankiem drugiego marca. 9 marca Srebrny Glob przejdzie przez ostatnią kwadrę, 17 marca – przez now, 24 marca – przez I kwadrę i 31 marca – ponownie przez

pełnię. Jak łatwo zauważyć, bezksiężycowe noce wystąpią jedynie w środku miesiąca, przy czym (ze względu na nachylenie ekliptyki) na niebie porannym Księżyc będzie widoczny słabo i będzie znikał w zorzy porannej już kilka dni przed nowiem, natomiast na wieczornym będzie widoczny bardzo dobrze i już 18 marca, 45 minut po zmierzchu oraz 28 godzin po nowiu, można próbować dostrzec bardzo cienki sierp Księżycyca w fazie 2%, tuż nad zachodnim widnokregiem. Jego odnalezienie znacznie ułatwi znajdująca się wtedy kilka stopni od niego para jasnych planet Wenus-Merkury.

W marcu Księżyc dwukrotnie zakryje gwiazdę Regulus we Lwie, najpierw pierwszego, a następnie 28 marca. Za pierwszym razem oba ciała niebieskie zajdą tuż przed początkiem zakrycia (widoczność na zachód od Polski), natomiast za drugim zjawisko da się obserwować jedynie z północno-wschodniej Azji. Podobnie zdarzy się przy zakryciu Aldebarana w Byku 22 marca – Księżyc zajdzie niewiele przed początkiem zjawiska. Z jaśniejszych gwiazd Hiad za Księżycem zniknie tylko gwiazda 75 Tau. Za to dzień wcześniej Srebrny Glob w fazie 20% zbliży się do gwiazdy 4. wielkości 5 Tau. Na północ od linii Łębork-Gdańsk-Mragowo dojdzie do jej zakrycia przez Księżyc.

Tegoroczny marzec to miesiąc wszystkich planet oprócz Neptuna. W trakcie miesiąca wszystkie będą dostępne obserwacjom. Na niebie wieczornym ciasną początkowo parę tworzą Merkury z Wenus. Pierwsza planeta od Słońca 18 marca osiągnie maksymalną elongację wschodnią, wynoszącą jednak tylko 18°. Tego wieczora godzinę po zachodzie Słońca planeta wzniesie się na wysokość prawie 7° nad zachodni widnokrąg, a w odległości 4° towarzystwa Merkuremu dotrzyma Wenus. Pierwszego kwietnia Merkury przejdzie przez koniunkcję dolną ze Słońcem, stąd planeta pozostanie widoczna do 25 marca. Następnie Merkury przejdzie na niebo poranne, 29 kwietnia osiągając maksymalną elongację zachodnią, wynoszącą 27°. Mimo większego o 9° oddalenia od Słońca niekorzystne nachylenie ekliptyki do widnokregu sprawi, że w kwietniu planety nie da się obserwować z dużych północnych szerokości geograficznych. W trakcie miesiąca tarcza Merkurego będzie rosła, zaś faza i jasność – malała. Na początku miesiąca Merkury rozbliży się do  $-1,3^m$ , przy średnicy tarczy 5'' i fazie 92%. 25 marca jasność planety osłabnie do  $+2,5^m$ , tarcza urośnie do 10'', zaś faza spadnie do 9%.

Jak już wspominałem, w marcu niedaleko Merkurego przebywa planeta Wenus, powracająca na niebo wieczorne po styczniowej koniunkcji ze Słońcem. Planeta dąży do sierpniowej (niekorzystnej) maksymalnej elongacji wschodniej i przez cały miesiąc warunki obserwacyjne Wenus będą się poprawiać. Na początku marca godzinę po zmierzchu planeta schowa się już pod horyzont, lecz potem powędruje szybko w górę i ostatniego dnia miesiąca o tej samej porze zajmie pozycję na wysokości 7° nad zachodnim widnokregiem. W marcu blask planety prawie się nie zmieni i wyniesie  $-3,9^m$ . Tarcza Wenus urośnie, ale tylko do 11'',

natomiast faza spadnie do 94%. Na początku marca do Wenus zbliży się Merkury na odległość 1°. 15 marca dystans między planetami przekroczy 4°, a następnie nieco spadnie, lecz po 22 marca Merkury zacznie szybko zbliżać się do Słońca i tak samo szybko oddali się od Wenus. 18 marca blisko obu planet przejdzie Księżyc tuż po nowiu.

Planeta Uran dobrze widoczna jest tylko na początku marca, gdy około godz. 19:15 zajmie pozycję na wysokości ponad 20°, świecąc jako gwiazda o jasności  $+5,9^m$ . Z upływem czasu planeta zbliży się do widnokregu i pod koniec miesiąca o tej samej porze Uran dotrze już do horyzontu. 29 marca czeka go bardzo bliskie spotkanie z Wenus i około 2 w nocy obie planety oddzieli jedynie nieco ponad 4'. Niestety, wtedy nie da się ich obserwować z Polski. U nas 18 marca planety zbliżą się na 19', dzień później dystans urośnie do prawie 1°. Obie planety znajdą się niewiele ponad 1° od gwiazdy  $\rho$  Psc.

W drugiej połowie nocy marcowej poprawiają się warunki obserwacyjne trzech najbliższych Ziemi planet zewnętrznych. Jowisz przygotowuje się do majowej opozycji i – jak zawsze – dwa miesiące przed nią zmienia kierunek swojego ruchu z prostego na wsteczny, co nastąpi 9 marca. Stąd planeta przez cały miesiąc wśród gwiazd przesunie się bardzo niewiele, zajmując pozycję w środku gwiazdozbioru Wagi, 8° na południe od gwiazdy Zuben Eschamali ( $\beta$  Lib). Jowisz pokaże się na nieboskłonie przed północą, a w trakcie miesiąca jego jasność urośnie do  $-2,4^m$ , zaś średnica tarczy – do 43''. 7 marca 4° od Jowisza przejdzie Księżyc w fazie 72%.

Mars oraz Saturn będą widoczne nad ranem. Początkowo Mars będzie wschodził około godziny 2:30, Saturn – godzinę później, ale z upływem miesiąca Czerwona Planeta zbliży się do Saturna, zmniejszając dystans z 17° na początku marca do niecałych 80' na początku kwietnia. W marcu Mars przejdzie z Wężownika do Strzelca, gdzie przez cały czas przebywa Saturn, zwiększając przy tym jasność do  $+0,3^m$  i średnicę do 8'', prezentując fazę 88%. 19 marca Czerwona Planeta przejdzie tylko 31' na południe od słynnej mgławicy M20, natomiast pod koniec marca minie w odległości 2° gwiazdę 3. wielkości Kaus Borealis. W tym samym czasie Saturn zwiększy swój blask do  $+0,5^m$  i średnicę tarczy do 17''. Pod koniec miesiąca Saturn minie w odległości niecałych 100' gromadę kulistą M22. 10 marca Księżyc po ostatniej kwadrze spotka się z Marsem, dobę później w fazie 34% minie Saturna.

Na wiosnę warto zwrócić uwagę na gwiazdę R Leo. Jest to miryda z okresem zmian blasku 310 dni, a jej maksimum jasności w tym roku przypada w kwietniu. Może wtedy osiągnąć blask nawet  $+4,5^m$ . R Leo jest łatwa do odnalezienia, gdyż znajduje się 5° na zachód od jasnej gwiazdy Regulus. Dodatkowo wyróżnia się ona wyraźnie czerwoną barwą. W marcu R Leo góruje około 22, w kwietniu – około 21 (po zmianie czasu na letni).

*Ariel MAJCHER*