Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przesyłać również pocztą elektroniczną pod adresem `delta@mimuw.edu.pl` (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`

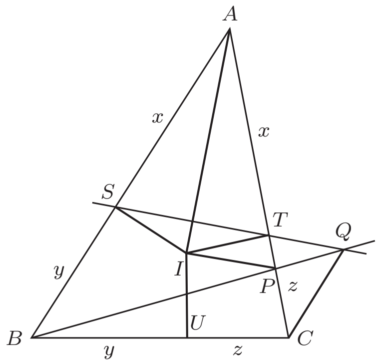
Termin nadsyłania rozwiązań: 31 V 2018

Zadania z matematyki nr 757, 758

Redaguje Marcin E. KUCZMA

757. Funkcje $f, g\colon \{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,n\}$ są określone wzorami
$$f(k) = \max\{1,\ k-1\}, \qquad g(k) = \min\{n,\ k+1\}.$$
Dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ ustalić, ile jest funkcji $h\colon \{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,n\}$, dających się wyrazić jako złożenia skończenie wielu odwzorowań, z których każde jest jedną z funkcji f, g. [Dopuszczamy również złożenie puste (zero egzemplarzy funkcji f, g), przyjmując zwykłą umowę, że daje ono w wyniku odwzorowanie tożsamościowe $h(k) = k$.]

758. Trzy okręgi o promieniach r_1, r_2, r_3 są parami styczne zewnętrznie oraz są styczne wewnętrznie do okręgu o promieniu R. Wykazać, że
$$r_1 + r_2 + r_3 + 2\sqrt{r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1} \leqslant 3R.$$
Zadanie 758 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.



Rozwiązania zadań z numeru 11/2017

Przypominamy treść zadań:

749. Trójkąt ABC jest opisany na okręgu o środku I, stycznym do boków AB i AC w punktach S i T. Na boku AC leży taki punkt P, że $IP \| ST$. Proste ST i BP przecinają się w punkcie Q. Dowieść, że $QC \| AB$.

750. Znaleźć wszystkie pary liczb pierwszych p, q $(p > q)$, dla których także liczby $(p^2+q^2)/2$ oraz $(p^2-q^2)/24$ są pierwsze.

749. Oznaczmy przez U punkt styczności boku BC z okręgiem wpisanym (rys.) i niech
$$x = |AS| = |AT|, \quad y = |BS| = |BU|, \quad z = |CT| = |CU|,$$
$$r = |IS| = |IT| = |IU|, \quad s = x + y + z.$$
Zachodzi równość $xyz = r^2 s$ (znany fakt – lub nietrudne ćwiczenie).

Odcinek IT jest wysokością w trójkącie prostokątnym AIP; zatem $|PT| = r^2/x = yz/s$. Stąd
$$\frac{|AP|}{|PT|} = \frac{|AT| + |PT|}{|PT|} = 1 + \frac{|AT|}{|PT|} = 1 + \frac{sx}{yz} = \\ = \frac{yz + (x+y+z)x}{yz} = \frac{(x+y)(x+z)}{yz}.$$
Prosta BP przecina boki trójkąta AST (lub ich przedłużenia) w punktach Q, P, B więc w myśl wzoru Menelausa
$$\frac{|QS|}{|TQ|} = \frac{|AP|}{|PT|} \cdot \frac{|SB|}{|BA|} = \frac{(x+y)(x+z)}{yz} \cdot \frac{y}{x+y} = \\ = \frac{x+z}{z} = \frac{|AC|}{|CT|}.$$
Uzyskana proporcja implikuje równoległość prostych QC i AB (odwrócenie twierdzenie Talesa).

750. Przyjmijmy, że liczby p, q spełniają postawione warunki; w szczególności $p^2 - q^2 = 24r$, gdzie r jest liczbą pierwszą. Jasne, że $q \neq 2$, $q \neq 3$. Iloczyn liczb naturalnych $(p+q)/2$ i $(p-q)/2$ wynosi $6r$, więc jedna z nich dzieli się przez r. W takim razie druga jest dzielnikiem liczby 6; wobec czego mniejsza z nich nie przekracza 6. Dostajemy oszacowanie $p - q \leqslant 12$.

Jeżeli $q = 5$, to $p \leqslant 17$, czyli $p \in \{7, 11, 13, 17\}$. Sprawdzamy, że tylko para $(p,q) = (17,5)$ jest dobra.

Dalej przyjmujemy, że $p > q > 5$. Wówczas $p^4 \equiv q^4 \equiv 1 \pmod 5$, więc
$$(p^2 - q^2)(p^2 + q^2) \equiv 0 \pmod 5.$$
To pokazuje, że iloczyn liczb całkowitych $r = (p^2-q^2)/24$ oraz $s = (p^2+q^2)/2$ dzieli się przez 5. Są to z założenia liczby pierwsze, więc któraś z nich jest równa 5. Ale $2s = p^2 + q^2 \geqslant 11^2 + 7^2$. Pozostaje możliwość $r = 5$.

Iloczyn liczb naturalnych $(p+q)/2$ i $(p-q)/2$ wynosi $6r = 30$. Cztery możliwe rozkłady $(30 \cdot 1,\ 15 \cdot 2,\ 10 \cdot 3,\ 6 \cdot 5)$ dają pary (p,q), odpowiednio, $(31,29)$, $(17,13)$, $(13,7)$, $(11,1)$. Ostatnia odpada. Dla $p = 31$, $q = 29$ wychodzi $s = 901$, liczba złożona. Pozostałe dwie pary są już dobre. Wraz z parą znalezioną wcześniej, ostatecznie otrzymujemy trzy rozwiązania. Wypiszemy je, podając również wartości r i s:

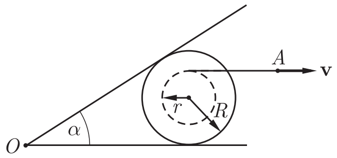
p	q	r	s
17	5	11	157
17	13	5	229
13	7	5	109

Zadania z fizyki nr 654, 655

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 V 2018

654. Na szpulę o promieniu wewnętrznym r i zewnętrznym R nawinięta jest linka (rys. 1). Koniec A linki ciągnięty jest poziomo z prędkością v. Na szpuli opiera się deska, która może obracać się wokół poziomej osi prostopadłej do płaszczyzny rysunku, przechodzącej przez punkt O. Szpula toczy się bez poślizgu po powierzchni poziomej. Jaka jest prędkość kątowa deski, gdy tworzy ona z poziomem kąt α?



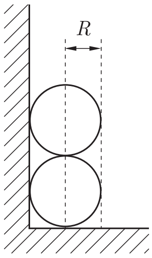
Rys. 1

655. Ciężarek o masie m wisi na nici. Na jaką najmniejszą wysokość należy podnieść ciężarek, aby spadając, rozerwał nić? Minimalna siła wystarczająca do rozerwania nici wynosi Mg (g jest przyspieszeniem ziemskim) i przed rozerwaniem wydłuża ją o a. Zakładamy, że siła naprężenia nici jest proporcjonalna do jej wydłużenia aż do zerwania.

Rozwiązania zadań z numeru 11/2017

Przypominamy treść zadań:

646. Dwie kulki o jednakowych masach i promieniach R leżą jedna na drugiej na poziomej powierzchni, stykając się ze ścianą (rys. 2). Po zakłóceniu równowagi kulka górna ślizga się wzdłuż ściany, kulka dolna ślizga się po poziomej powierzchni, a ich prędkości początkowe są zerowe. Nie ma tarcia. Znaleźć prędkość kulki dolnej po utracie kontaktu między kulkami.



Rys. 2

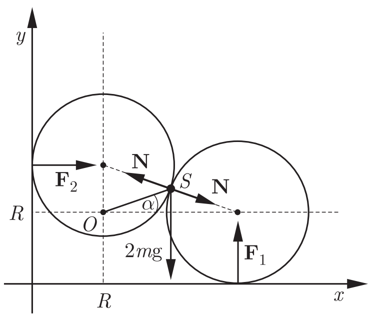
647. Nienaładowany, metalowy walec obraca się z prędkością kątową ω wokół swojej osi. Walec umieszczony jest w jednorodnym polu magnetycznym, którego wektor indukcji $\vec{B}$ jest równoległy do osi walca. Znaleźć gęstość ładunku wewnątrz walca.

646. Dopóki kulki się stykają, środek masy układu S porusza się po okręgu o środku w punkcie O i promieniu R (rys. 3). Siła dośrodkowa spełnia równanie

$$2mv^2/R = 2mg\sin\alpha - F_1\sin\alpha - F_2\cos\alpha,$$

gdzie v jest prędkością środka masy, $\mathbf{F}_1$ i $\mathbf{F}_2$ siłami reakcji ze strony podłoża i ściany, α jest kątem, jaki tworzy wektor położenia środka masy zaczepiony w punkcie O z poziomem. Oznaczając przez N wartość siły oddziaływania między kulkami, możemy zapisać związki $F_2 = N\cos\alpha$, $F_1 = mg + N\sin\alpha$. Gdy kulki przestają się stykać, w położeniu opisanym kątem α_0 mamy $F_2 = 0$, $F_1 = mg$,

$$v^2 = (gR\sin\alpha_0)/2 \tag{1}$$



Rys. 3

Oznaczmy prędkości kulek dolnej i górnej w chwili utraty kontaktu odpowiednio przez $\mathbf{v}_1 = (v_1,\, 0)$ i $\mathbf{v}_2 = (0,\, v_2)$. Z definicji środka masy mamy

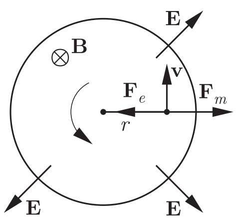
$$\mathbf{v} = (v_x,\, v_y) = (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)/2, \text{ zatem } v_x = v\sin\alpha_0 = v_1/2,\ v_y = v\cos\alpha_0 = v_2/2.$$

Ponieważ nie ma tarcia, spełniona jest zasada zachowania energii mechanicznej

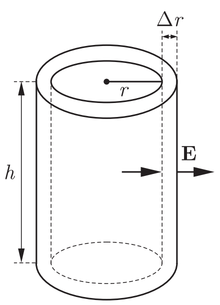
$$2mgR = 2mgR\sin\alpha_0 + m(v_1^2 + v_2^2)/2 = 2mgR\sin\alpha_0 + 2mv^2.$$

Uwzględniając (1), otrzymujemy: $\sin\alpha_0 = 2/3$, $v^2 = gR/3$. Szukana prędkość dolnej kulki w chwili utraty kontaktu z górną dana jest wzorem $v_1 = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{gR}{3}}$.

647. 1. Rozpatrzmy przypadek, gdy wektory indukcji pola magnetycznego $\mathbf{B}$ oraz prędkości kątowej walca $\boldsymbol{\omega}$ mają zwroty przeciwne (rys. 4). Na swobodny elektron wewnątrz walca, poruszający się po okręgu o promieniu r, działa siła magnetyczna $F_m = e\omega Br$ zwrócona na zewnątrz okręgu (e oznacza wartość bezwzględną ładunku elektronu). Wypadkowa siła działająca na elektron jest siłą dośrodkową, zatem siła elektryczna $F_e = eE$ jest większa od siły magnetycznej i ma zwrot do środka okręgu (E jest natężeniem pola elektrycznego wewnątrz walca). Równanie ruchu elektronu ma postać $m\omega^2 r = eE - e\omega Br$, stąd natężenie pola elektrycznego $E = \omega r(m\omega + eB)/e = \alpha r$ ma zwrot na zewnątrz walca, a jego wartość rośnie liniowo z odległością od środka walca. Rozważmy cienką warstwę cylindryczną o grubości Δr wewnątrz walca (rys. 5). Oznaczając przez $\rho(r)$ gęstość ładunku wewnątrz tej warstwy, możemy zapisać prawo Gaussa $2\pi h\big(E(r+\Delta r)\cdot(r+\Delta r) - E(r)\cdot r\big) = \pi\rho(r)h\big((r+\Delta r)^2 - r^2\big)/\varepsilon_0$, gdzie h jest wysokością walca. Stąd $\rho(r) = 2\varepsilon_0 E(r)/r = 2\varepsilon_0\omega(m\omega + eB)/e > 0$. Gęstość ładunku wewnątrz walca jest stała i dodatnia, ładunek ujemny rozłożony jest na powierzchni walca.



Rys. 4



Rys. 5

2. Gdy wektory $\mathbf{B}$ i $\boldsymbol{\omega}$ mają zwroty przeciwne, siła magnetyczna działająca na swobodny elektron ma zwrot do środka okręgu, równanie ruchu elektronu ma postać $m\omega^2 r = e\omega Br \pm eE$. Znak $+$ opisuje przypadek, gdy $\omega > eB/m$, znak $-$, gdy nierówność ma znak przeciwny. Szukana gęstość ładunku dana jest wzorem $\rho = 2\varepsilon_0\omega(m\omega - eB)/e$ i może być dodatnia albo ujemna. Gdy $\omega = eB/m$, gęstość ładunku wynosi 0.