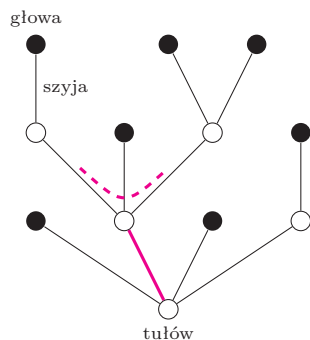


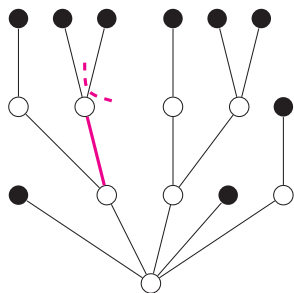
Jak radzić sobie z Hydrą?

Krzysztof PIECUCH*

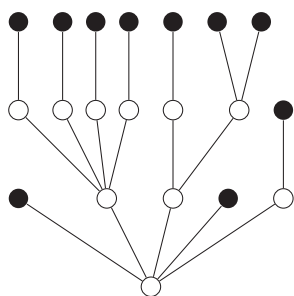
*doktorant, Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Wrocławski



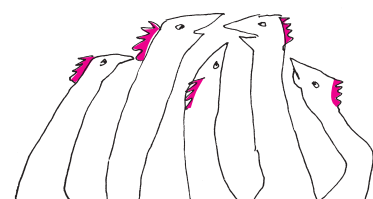
Rys. 1. Przykładowa Hydra



Rys. 2. Hydra po odcięciu pierwszej głowy



Rys. 3. Hydra po odcięciu drugiej głowy



Drodzy Poszukiwacze Przygód, witam Was na kolejnym szkoleniu. Dzisiaj nauczymy się jak rozpoznawać, znajdować i radzić sobie w boju z Hydrą. Hydry to paskudne stworzenia, zamieszkujące świat grafów. Niech Was nie zmyli rysunek 1. Zobaczcie, jak przerażająco on wygląda. Hydry to bestie, które tylko upodobniają się do drzew, aby Was zmylić! Tam, gdzie niektórzy z Was dostrzegają korzeń, znajduje się tułów bestii. Tam, gdzie wydają się być liście, są głowy naszego stwora. Krawędzie to szyje, a wierzchołki wewnętrzne to zgięcia.

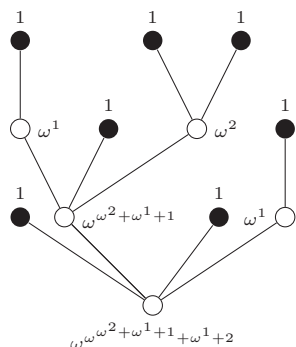
Walka z tą poczwara jest długa i wykańczająca. Jeśli kiedykolwiek spotkacie tego stwora, bierzcie nogi za pas. Jednakże, gdyby Wam przyszło zmierzyć się z Hydrą, dam Wam garść wskazówek. Po pierwsze, ścinajcie głowy pojedynczo – nie chcecie uszkodzić swojego miecza. Po drugie, głowę Hydry ścinajcie wraz z szyją, przy samym zgięciu. Tak jak na rysunku 1. Jeśli zdecydowaliśmy się uciąć głowę, która znajduje się przy samym tułowiu, to mamy spokój. Jednak, jeżeli ucieliśmy którąkolwiek inną, musimy przygotować się na niespodziankę. Popatrzcie na szyję przy zgięciu, która idzie w stronę tułowia (na rysunku 1 zaznaczona kolorem). Zostanie ona skopiowana wraz z całą zawartością i razy, gdzie i to liczba głów, które ścieliście do tej pory. Jeśli ze zgięcia, przy którym cieliśmy, nie wyrasta już żadna szyja – to zgięcie zamienia się w nową głowę. Jeżeli, na przykład, głowa z rysunku 1 była pierwszą, którą ścieliśmy, to po jej ścięciu Hydra będzie wyglądała tak jak na rysunku 2. Po ucięciu głowy z rysunku 2 Hydra będzie wyglądała tak jak na rysunku 3. By pokonać Hydrę, musimy ściąć wszystkie głowy, tak by pozostał sam tułów.

Walka z Hydrą wydaje się beznadziejna. Spróbujcie sami na kartce. Liczba głów wydaje się rosnać. I to rosnać bardzo szybko. Czy jest jakaś strategia, postępując według której, uda nam się w końcu pokonać stwora? Okazuje się, że prawdziwa jest stara maksyma, która mówi, że trzeba odpowiednio długo machać mieczem i nigdy się nie poddawać.

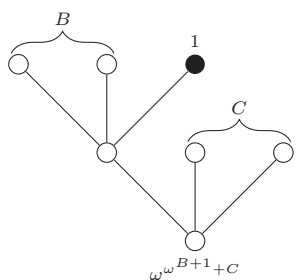
Zaskakujące Twierdzenie 1. Każda strategia ścinania głów prowadzi do pokonania Hydry.

Liczba głów Hydry potrafi urosnąć bardzo szybko. A, jak to mówił klasyk: by mówić o wyższych liczbach, potrzebujemy wyższej matematyki. Z pewnością, Drodzy Poszukiwacze Przygód, potraficie liczyć. Niektórzy z Was potrafią liczyć do dziesięciu, niektórzy do stu albo do miliona. Pewnie są też wśród Was tacy, którzy potrafią liczyć do nieskończoności. Dzisiaj nauczymy się liczyć poza nieskończoność. Będzie nam potrzebny specjalny symbol ω , czyli ostatnia litera alfabetu greckiego. Oznaczać ona będzie najmniejszą „liczbę” większą od dowolnej liczby naturalnej. Zatem dla każdej liczby naturalnej n będzie zachodziło $n < \omega$. Ponadto symbol ten będziemy traktowali jak zwykłą liczbę naturalną – będziemy mogli ją dodawać, mnożyć i potęgować. Niedozwolone będzie natomiast odejmowanie i dzielenie. Jak Wam wiadomo – operacje te wyprowadzają nas poza liczby naturalne.

Kiedy wprowadziliśmy już sobie jedno oznaczenie, będziemy mogli liczyć dosyć daleko. Następną liczbą większą po ω jest $\omega + 1$, później $\omega + 2$, $\omega + 3$ i tak dalej. Najmniejszą liczbą większą od każdej liczby postaci $\omega + n$ (gdzie n to liczba naturalna) jest $\omega + \omega$, czyli $2 \cdot \omega$. Następnymi liczbami będą $2 \cdot \omega + 1$, $2 \cdot \omega + 2$ i tak dalej. Gdy skończą nam się liczby postaci $n \cdot \omega + m$, zawsze możemy użyć liczby $\omega \cdot \omega$, czyli ω^2 . Gdy braknie liczb postaci ω^n , możemy użyć ω^ω i tak dalej. Jak widać, za pomocą tylko jednego dodatkowego symbolu nauczyliśmy się liczyć dalej, niż kiedykolwiek wcześniej myśleliśmy, że liczyć można. Matematycy nazywają te liczby porządkowymi. Ponadto matematykom nie wystarcza jeden symbol i mają liczby dalece większe niż te, które da się wyrazić za pomocą symbolu ω . Jednak na dzisiejszym szkoleniu zadowolimy się tym jednym symbolem.



Rys. 4. Sposób wyznaczania liczby bestii



Rys. 5. Liczba bestii maleje po ścięciu dowolnej głowy

Teraz nauczymy się wyznaczać liczbę (numer) bestii. Aby to zrobić, zaczynamy od głów. Każdej głowie nadajemy liczbę 1. Każdemu zgięciu (jak i tułowiu) nadamy liczbę ω^K , gdzie K to suma liczb głów i zgięć wychodzących z tego zgięcia. Liczba bestii to numer, który nadaliśmy tułowiu. Na rysunku 4 mamy przykład, w jaki sposób należy liczyć liczbę bestii.

Pokażę Wam teraz, że liczba bestii zawsze maleje po obcięciu jednej z głów. Oczywiście, jeśli odetniemy głowę zaraz przy tułowiu – nic nie odrasta i liczba bestii się zmniejsza. Odetnijmy zatem jakąś głowę, która nie znajduje się przy tułowiu. Odcinamy głowę, która, oczywiście, ma numer 1. Ze zgięcia, przy którym odcinaliśmy, mogą wychodzić inne głowy i zgięcia. Powiedzmy, że sumarycznie mają one wartość B (rys. 5). Zatem zgięcie ma numer ω^{B+1} . Zgięcie to wychodzi z innego zgięcia (lub tułowia). Z tego zgięcia mogą wychodzić inne zgięcia. Oznaczmy sumę ich numerów jako C . Zatem zgięcie to ma numer $\omega^{\omega^{B+1}+C}$. Równie łatwo możemy obliczyć liczbę tego zgięcia po odcięciu głowy. Jeśli była to i -ta głowa, którą odcięliśmy, to otrzymamy numer $\omega^{i \cdot \omega^{B+1}+C}$. Wykonując proste rachunki, możemy przekonać się, że jest to liczba mniejsza.

$$\begin{aligned} i &< \omega \\ i \cdot \omega^B &< \omega^{B+1} \\ i \cdot \omega^B + C &< \omega^{B+1} + C \\ \omega^{i \cdot \omega^B + C} &< \omega^{\omega^{B+1} + C} \end{aligned}$$

Do pełni szczęścia potrzebujemy jeszcze indukcji matematycznej po liczbie zgięć od tułowia do tego zgięcia, aby udowodnić, że również sama liczba bestii ulega zmniejszeniu. Pewnie zastanawiacie się: czy potrzebowaliśmy wprowadzać taką dziwną liczbę, aby udowodnić to Twierdzenie? Otóż tak!

Zaskakujące Twierdzenie 2. *Zaskakującego Twierdzenia 1 nie da się udowodnić w arytmetyce Peano.*

Dla przypomnienia – arytmetyka Peano to zaksjomatyzowana wersja arytmetyki znanej ze szkoły. Każdą Hydrę możemy zakodować w postaci liczby. Dzięki temu możemy mówić o bitwach w języku arytmetyki pierwszego rzędu. Doświadczony w bojach Poszukiwacz Przygód może zauważyć, że nie każdą strategię jesteśmy w stanie zapisać w arytmetyce Peano. To dlatego, że strategie są obiektami nieskończonymi. Nie przeszkadza nam to, gdyż możemy ograniczyć Zaskakujące Twierdzenie 1 do strategii rekursywnych, czyli takich, które można całe zapisać za pomocą arytmetyki Peano.

Jeśli słyszeliście kiedykolwiek o Twierdzeniu Gödla, Hipotezie continuum albo o geometrii absolutnej, powinniście wiedzieć, że w matematyce zdarzają się twierdzenia danej teorii, których nie da się ani udowodnić, ani im zaprzeczyć. Mało tego, że znaleźliśmy twierdzenie, którego nie da się ani udowodnić, ani obalić w arytmetyce Peano; pokazaliśmy także, że jest to twierdzenie prawdziwe (w pewnej szerszej teorii)! To jednak nie wszystko!

Zaskakujące Twierdzenie 3. *Każda technika dowodowa, wystarczająco silna, aby udowodnić Zaskakujące Twierdzenie 1, jest wystarczająco silna, aby udowodnić niesprzeczność arytmetyki Peano.*

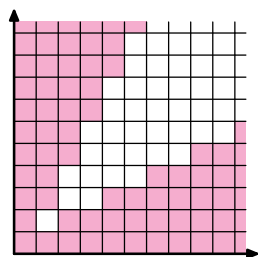
Zgodnie z Twierdzeniem Gödla – wewnątrz arytmetyki Peano nie możemy udowodnić niesprzeczności tej teorii (no chyba, że jest ona wewnętrznie sprzeczna). Aby to zrobić, potrzebujemy pewnej szerszej teorii. Na przykład dodanie „liczby” większej od każdej liczby naturalnej do arytmetyki Peano poszerzy ją w pewien sposób. Skorzystał z tego Gentzen, dowodząc niesprzeczności arytmetyki Peano w 1936 roku. Zaskakujące Twierdzenie 3 jest ogólniejsze. Mówi, że jakkolwiek rozszerzymy arytmetykę Peano tak, aby możliwe było udowodnienie Zaskakującego Twierdzenia 1, będziemy w stanie również udowodnić niesprzeczność arytmetyki Peano.

Okazuje się, że czasem teoretyczne dywagacje na temat potyczek z bestiami mogą być równie pasjonujące, jak sama walka. To wszystko, co miałem Wam do przekazania dzisiaj. Odmaszerować!



Rozwiązanie zadania M 1559.

Każde pole będziemy utożsamiać ze współzrędnymi jego lewego dolnego rogu. Udowodnimy, że jeżeli wyróżnimy tylko takie pola (i, j) , że $2i \leq j$ lub $2j \leq i$, to warunki zadania będą spełnione.



Rzeczywiście, dla każdego $r \in \mathbb{R}$ prosta $y = x + r$ przecina skończenie wiele wyróżnionych pól, mianowicie takie pola $(x, x + d)$, że $x \in [0, d] \cap \mathbb{Z}$, przy czym $d \in \{\lfloor r \rfloor, \lceil r \rceil\}$.

Z kolei każdy kwadrat o lewym dolnym rogu $(0, 0)$, a prawym górnym $(2k, 2k)$ zawiera dokładnie

$$2k(k+1) - 1$$

wyróżnionych pól, czyli więcej od $\frac{1}{2}(2k)^2$. Stąd każdy kwadrat o lewym dolnym rogu $(0, 0)$, a prawym górnym $(2k-1, 2k-1)$ zawiera o $2k$ wyróżnionych pól mniej, czyli

$$2k(k+1) - 1 - 2k = 2k^2 - 1,$$

co jest większe od $\frac{1}{2}(2k-1)^2$.