

## Informatyczny kącik olimpijski (113): Kieszonkowe

**Zadanie** (VIII Olimpiada Informatyczna Gimnazjalistów w roku szkolnym 2013/2014). Danych jest  $n$  stosów, ponumerowanych od 1 do  $n$ . Każdy stos zawiera dokładnie dwie monety, ułożone jedna na drugiej. Ciąg  $g_1, g_2, \dots, g_n$  oznacza nominały monet, znajdujących się na górze kolejnych stosów, zaś ciąg  $d_1, d_2, \dots, d_n$  nominały monet, znajdujących się na dole kolejnych stosów. Staś, bohater zadania, może wykonać co najwyżej  $k$  ruchów. W każdym ruchu chłopiec wybiera dowolny niepusty stos  $i$  zabiera monetę ze szczytu tego stosu. Jaki jest największy możliwy zysk Stasia?

### Rozwiązanie dynamiczne

Zadanie możemy rozwiązać, korzystając z metody programowania dynamicznego. Niech  $DP[i][j]$  oznacza maksymalny zysk dla problemu ograniczonego do stosów o numerach od 1 do  $i$  oraz maksymalnej liczbie ruchów równej  $j$ . Łatwo obliczyć wartości  $DP$  dla pierwszego stosu ( $i = 1$ ):

- $DP[1][0] = 0$ ;
- $DP[1][1] = g_1$ ;
- $DP[1][j] = g_1 + d_1$ , dla  $j > 1$ .

Przejdźmy teraz do obliczenia wyników dla większej liczby stosów. Dla każdego  $i \in \{2, 3, \dots, n\}$  oraz  $j \in \{0, 1, \dots, k\}$  aby obliczyć wartość  $DP[i][j]$ , należy rozpatrzyć trzy sytuacje:

- nie bierzemy ani jednej monety z  $i$ -tego stosu, wtedy wynikiem jest  $DP[i-1][j]$ ;
- bierzemy jedną monetę z  $i$ -tego stosu, wtedy wynikiem jest  $DP[i-1][j-1] + g_i$ ;
- bierzemy dwie monety z  $i$ -tego stosu, wtedy wynikiem jest  $DP[i-1][j-2] + g_i + d_i$ .

Wartością  $DP[i][j]$  jest maksimum z trzech powyższych wartości. Oczywiście, druga sytuacja jest możliwa tylko dla  $j > 0$ , podobnie trzecia tylko dla  $j > 1$ . Największym zyskiem Stasia jest  $DP[n][k]$ .

Wszystkich stanów jest  $O(nk)$ . Obliczenie wyniku dla każdego stanu odbywa się w czasie stałym. Stąd złożoność czasowa rozwiązania wynosi  $O(nk)$ .

### Rozwiązanie zachłanne

Okazuje się, że istnieje rozwiązanie o lepszej złożoności czasowej. Na początku podzielmy stosy na dwie grupy. Niech pierwsza grupa zawiera stosy, których górna moneta ma nominal nie mniejszy niż dolna moneta, nazwijmy je  $A$ -stosami. Pozostałe stosy niech tworzą drugą grupę i nazwijmy je  $B$ -stosami. Każdą z tych grup rozważmy oddzielnie.

#### Przypadek 1: $A$ -stosy

Załóżmy, że mamy  $m$   $A$ -stosów. Chcemy wybrać  $x$  monet, których sumaryczna wartość jest największa. Załóżmy dodatkowo, że w każdym ruchu możemy wybrać dowolną monetę (górną lub dolną). Nietrudno zauważyć, że aby zmaksymalizować zysk, należy wybrać  $x$  monet o największym nominale. Zatem posortujmy wszystkie monety malejąco według nominalu. Otrzymujemy ciąg  $a_1, a_2, \dots, a_{2m}$ , oznaczający wartości wszystkich monet. Największy zysk uzyskamy, jeśli weźmiemy następujące monety:  $a_1, a_2, \dots, a_k$ .

Strategia zachłanna, która została opisana powyżej, jest również poprawna bez dodatkowego założenia o braniu dowolnej monety. Ustalamy zatem, że możemy brać tylko monety ze szczytu stosu. Przypuśćmy, że w optymalnym rozwiązaniu chcemy wziąć dwie monety  $a_i$  (górną) i  $a_j$  (dolną), które tworzą jeden stos. Skoro rozważamy  $A$ -stos ( $a_i \geq a_j$ ) oraz ciąg  $a$  jest posortowany malejąco, to  $i \leq j$ . Zatem strategia zachłanna jest poprawna, ponieważ najpierw wybierze górną monetę  $a_i$ , a dopiero potem dolną  $a_j$ . Tutaj jest drobna subtelnosc, jeśli dwie monety mają ten sam nominal, wtedy pierwszeństwo ma górna.

#### Przypadek 2: $B$ -stosy

Załóżmy, że mamy  $m$   $B$ -stosów. Chcemy wybrać  $x$  monet, których sumaryczna wartość jest największa. Przypuśćmy, że w optymalnym rozwiązaniu istnieją dwa stosy (o numerach  $i$  oraz  $j$ ), z których zabieramy po jednej monecie. Bez straty ogólności możemy założyć, że  $g_i \leq g_j$ . Wiadomo (z własności  $B$ -stosu), że  $g_j < d_j$ . Skoro  $g_i \leq g_j$  oraz  $g_j < d_j$ , to  $g_i < d_j$ . Zatem wzięcie po jednej monecie ze stosów  $i$  i  $j$  nie jest optymalnym rozwiązaniem, gdyż bardziej opłaca się wziąć dwie monety z  $j$ -tego stosu. Stąd otrzymujemy, że w optymalnym rozwiązaniu nie ma dwóch stosów, z których zabieramy po jednej monecie. Innymi słowy, jest co najwyżej jeden stos, z którego zabieramy jedną monetę.

Zatem posortujmy stosy według malejącej sumy nominalów. Otrzymujemy ciąg  $s_1, s_2, \dots, s_n$ , gdzie  $s_i$  oznacza sumę nominalów  $i$ -tego najcenniejszego stosu. Jeśli  $x$  jest parzyste, to wybieramy monety ze stosów  $s_1, s_2, \dots, s_{\frac{x}{2}}$ . W przeciwnym przypadku rozważamy dwie sytuacje. Pierwsza z nich polega na wzięciu stosów  $s_1, s_2, \dots, s_{\frac{x}{2}}$  oraz monety o największym nominale spośród szczytów pozostałych stosów. Druga zaś polega na wzięciu stosów  $s_1, s_2, \dots, s_{\frac{x}{2}+1}$  bez monety o najmniejszym nominale spośród spodów wybranych stosów.

#### Podsumowanie

Rozwiązanie opiera się na rozpatrzeniu dla każdego  $x \in \{0, 1, \dots, k\}$  następującego przypadku: wybieramy  $x$  monet z  $A$ -stosów oraz  $k - x$  monet z  $B$ -stosów. Wynikiem jest maksimum spośród wyników dla tych przypadków. Całe rozwiązanie działa w czasie  $O(n \cdot \log(n))$ . Szczegóły implementacyjne pozostawiam Czytelnikowi jako ćwiczenie.

Bartosz ŁUKASIEWICZ