Złociaków nigdy dosyć

Kamila ŁYCZEK, Mariusz SKAŁBA**

* Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Wyobraźmy sobie, że trafiliśmy do dziwnego kraju, w którym jedynymi dostępnymi środkami płatniczymi są monety o nominałach a i b. Formy płatności nie rozwinęły się na tyle, żeby płacić kartą lub czekiem, na domiar złego wybraliśmy się do cukierni, w której kasa jest zupełnie pusta i sprzedawca nie może wydać nam reszty. Nie chcąc tracić swoich złociaków, rozglądamy się za pysznościami w cenach $a+a$, $a+b$, $xa+yb\ldots$ Niektórych kwot, oczywiście, nie daje się uzyskać z nominałów a i b, a niektóre można otrzymać na wiele sposobów.

Dla wszystkich względnie pierwszych liczb naturalnych $a, b \geqslant 2$ istnieje taka *największa niewygodna kwota* n, że wszystkie kolejne $n+1$, $n+2$, $n+3\ldots$ mogą być uzyskane za pomocą tych nominałów. Wyjaśnienie, że taka największa niewygodna n faktycznie istnieje, jej postać oraz parę innych obserwacji użytkowania tylko dwóch nominałów można znaleźć w Δ^4_{14}. A teraz rzucimy na sprawę nowe światło.

1. $n = n(a,b) = ab - a - b$ jest największą liczbą, która nie jest postaci $xa+yb$ dla $x, y \geqslant 0$ – mimo największych starań nie uzyskamy jej ze złociaków.
2. Dokładnie połowa liczb ze zbioru $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ jest postaci

$$(*) \qquad z = xa + yb, \quad \text{gdzie } x, y \geqslant 0.$$

3. Jeśli $z \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, to dokładnie jedna z liczb: z albo $n-z$ jest postaci $(*)$.

Własności 1 i 2 zostały udowodnione w Δ^4_{14}. Z obu tych własności wynika własność 3 na mocy następującego rozumowania: nie może się zdarzyć, że dla pewnego $z \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ obie liczby z oraz $n-z$ są postaci $(*)$, gdyż wówczas ich suma $z + (n-z) = n$ też byłaby postaci $(*)$, a to jest sprzeczne z własnością 1 (przecież n to największa liczba, której nie jesteśmy w stanie uzyskać!). Tak więc obie z i $n-z$ nie mogą jednocześnie być postaci $(*)$ – zatem z własności 2 otrzymujemy, że w każdym zbiorze $\{z, n-z\}$ dokładnie jedna z liczb jest postaci $(*)$!

Dla $a = 9$, $b = 5$ mamy $n(9,5) = 31$, a liczby przedstawialne w postaci $(*)$ (ich zbiór oznaczmy przez $P(a,b)$), mniejsze od 31, to

$$P(9,5) = \{5, 9, 10, 14, 15, 18, 19, 20, 23, 24, 25, 27, 28, 29, 30\}.$$

Natomiast liczby nieprzedstawialne w postaci $(*)$ mniejsze od 31 to

$$N(9,5) = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 11, 12, 13, 16, 17, 21, 22, 26\}.$$

Już na tym prostym przykładzie można zauważyć, że istnieją dość długie ciągi kolejnych liczb naturalnych, z których każda jest przedstawialna. Zachodzi bowiem następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1. *Dla dowolnych względnie pierwszych $a > b \geqslant 2$ w zbiorze $P(a,b)$ istnieje ciąg kolejnych $b-1$ liczb naturalnych, ale nie istnieje taki ciąg długości b.*

Dowód. Ponieważ liczby $1, 2, \ldots, b-1$ oczywiście nie są przedstawialne, więc na mocy własności 3 kolejne liczby $n-1, n-2, \ldots, n-b+1$ są przedstawialne. Gdyby w zbiorze $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ były kolejne liczby $m+1, m+2, \ldots, m+b$, wszystkie należące do $P(a,b)$, to na mocy własności 3 żadna z liczb $n-m-1$, $n-m-2$, $\ldots$, $n-m-b$ nie byłaby przedstawialna, co jednak jest sprzeczne z następującą obserwacją: odstępy między kolejnymi liczbami w $P(a,b)$ są nie większe od b (rzeczywiście, jeśli $xa+yb \in P(a,b)$, to następna liczba naturalna s w $P(a,b)$ spełnia nierówność $s \leqslant xa+yb+b$). □

Rozwiązanie zadania F 945.
Proces parowania zachodzi powoli i z dobrym przybliżeniem można przyjąć, że woda w akwarium jest w równowadze termicznej z otoczeniem o stałej temperaturze, od którego pobiera ciepło uzupełniające ubytek energii związany z parowaniem. Masa wody Δm, która wyparuje w ciągu bardzo małego czasu Δt, przy stałej temperaturze, stałej wilgotności powietrza i braku wiatru, zależy tylko od pola powierzchni wody S:

$$\Delta m = \alpha S \Delta t,$$

gdzie α jest współczynnikiem proporcjonalności. Zmiana poziomu wody Δh jest związana z Δm zależnością $\Delta m = \rho S \Delta h$, gdzie ρ to gęstość wody. Stąd

$$\Delta h = \frac{\alpha}{\rho}\Delta t.$$

Ponieważ warunki parowania są stałe, więc zmiana poziomu wody zależy liniowo od czasu i nie zależy od innych parametrów, w szczególności od kształtu naczynia. Skoro po dwóch dobach poziom wody obniżył się o 1 cm, to całkowicie wyparuje ona z naczynia po 30 dobach.

Rozwiązanie zadania F 946.
Jeżeli przyjmiemy, że odstęp czasu pomiędzy kolejnymi pomiarami temperatury wynosi Δt, to temperatura śniegu wyniosła $T_1 = -0{,}5^\circ$ po czasie $9\Delta t$, a $T_2 = -4^\circ$ po czasie $10\Delta t$, przy czym po czasie $9\Delta t$ cała zawarta w śniegu woda była już zamarznięta. Zapiszemy bilans cieplny, przyjmując, że prędkość odprowadzania ciepła w zamrażarce jest stała:

- od początku eksperymentu do 10-tego pomiaru
$$9\,\Delta t\, P = km\lambda + cm|T_1|,$$
- od 10-go do 11-go pomiaru
$$\Delta t\, P = cm(|T_2| - |T_1|),$$

gdzie P jest energią odprowadzaną w jednostce czasu, m jest masą śniegu, a k określa ułamek masy wody w śniegu. Z powyższych równań mamy

$$k = \frac{c(9|T_2| - 10|T_1|)}{\lambda}.$$

Po podstawieniu danych liczbowych dostajemy, że woda stanowiła 0,19 masy mokrego śniegu.

W sformułowaniu kolejnego twierdzenia wielkość parametrów a, b nie odgrywa żadnej roli – w tym sensie ma ono charakter bardziej uniwersalny niż twierdzenie 1.

Twierdzenie 2. *Ciąg kolejnych pięciu liczb z $P(a,b)$ zawsze zawiera podciąg arytmetyczny długości 3.*

Zanim je udowodnimy w ogólności, zobaczmy, jak to działa na naszym przykładzie. Ciąg $5, 9, 10, 14, 15$ zawiera podciąg arytmetyczny $5, 10, 15$; ciąg $9, 10, 14, 15, 18$ zawiera podciąg $10, 14, 18$; ciąg $14, 15, 18, 19, 20$ zawiera podciąg $18, 19, 20$ itd.

Dowód. Niech $z_1 < z_2 < z_3 < z_4 < z_5$ będą kolejnymi liczbami w $P(a,b)$. Dla każdego $k \in \{1,2,3,4,5\}$ istnieją więc takie liczby całkowite nieujemne x_k, y_k, że

$$z_k = x_k a + y_k b.$$

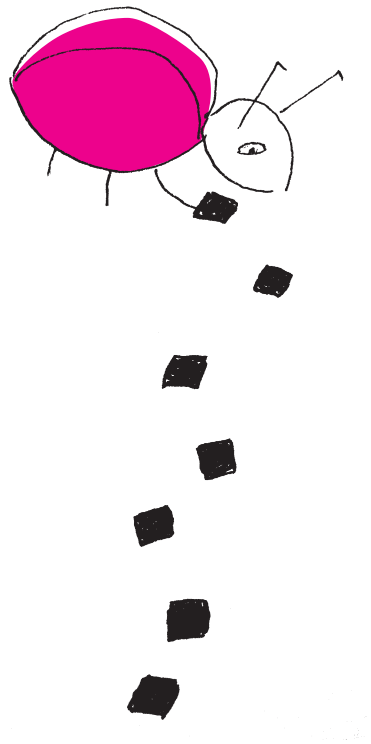
Każdej parze liczb (x_k, y_k) przyporządkujmy parę ich reszt modulo 2, np. jeśli $(x_k, y_k) = (12, 15)$ to otrzymujemy parę reszt $(0, 1)$. Ponieważ wszystkie pary reszt modulo 2 to: $(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)$ więc istnieją różne liczby $j, k \in \{1,2,3,4,5\}$ takie, że x_j,x_k są tej samej parzystości oraz y_j, y_k są tej samej parzystości. Wynika stąd, że liczba

$$\frac{z_j + z_k}{2} = \frac{x_j + x_k}{2} a + \frac{y_j + y_k}{2} b$$

jest postaci $(*)$, a zatem

$$\frac{z_j + z_k}{2} = z_m, \quad \text{gdzie } m \in \{1,2,3,4,5\},$$

gdyż liczby $z_1 < z_2 < z_3 < z_4 < z_5$ są kolejne w $P(a,b)$! $\square$



Mówiąc zupełnie wprost jest to zachęta do uczestnictwa w Konkursie Uczniowskich Prac z Matematyki im. Pawła Domańskiego, w którym należy przedstawić oryginalne matematyczne rozumowanie („uporanie" się z przedstawioną zachętą to dobry materiał na konkursową pracę). Konkurs jest skierowany do uczniów klas 7-8 oraz szkół ponadpodstawowych. Prace należy zgłaszać do 30 kwietnia. Informacje na temat Konkursu oraz niektóre dotychczas nagrodzone prace można znaleźć na stronie `www.deltami.edu.pl`.

Zachęta

Zachęcamy Czytelnika do napisania programu, który dla danych liczb względnie pierwszych $a > b \geqslant 2$ będzie generował zbiory $P(a,b)$. Wtedy można eksperymentować z różnymi konkretnymi parami a, b i na podstawie obserwacji dostrzegać różne prawidłowości. Niektóre z nich da się ująć w formę twierdzeń, czyli udowodnić – tak powstaje matematyka.

Pokusimy się o jeszcze jeden przykład. Skoro ostatnie $b - 1$ liczb z $P(a,b)$ są kolejnymi liczbami naturalnymi (dowód twierdzenia 1), to można zapytać o takie najmniejsze c, że obie liczby c oraz $c+1$ należą do $P(a,b)$. Wiemy, że $c \leqslant ab - a - 2b + 1$, ale eksperymentując z różnymi wartościami a, b, dochodzimy do następującej hipotezy.

Hipoteza. *Dla danych liczb względnie pierwszych $a > b \geqslant 2$ definiujemy $c(a,b)$ jako taką najmniejszą liczbę naturalną c, że obie liczby $c, c+1$ należą do $P(a,b)$ (tzn. mają postać $(*)$). Wówczas $c(a,b)$ można otrzymać w następujący sposób.*

Niech $a/b = [c_0; c_1, \ldots, c_k]$ będzie takim rozwinięciem liczby a/b na ułamek łańcuchowy, że $c_k > 1$ (takie rozwinięcie jest jedyne). Niech $f/g = [c_0; c_1, \ldots, c_{k-1}]$. Wówczas

$$c(a,b) = \min(ag, bf).$$

Teraz pojawiają się przynajmniej dwie możliwości: można próbować ją udowodnić lub obalić! Albo… rzucić się na głębszą wodę i zacząć badać pierwsze pojawienie się trójki kolejnych liczb w $P(a,b)$. Niech $d = d(a,b)$ będzie taką najmniejszą liczbą d, że $d, d+1, d+2 \in P(a,b)$ (zakładamy tu, oczywiście, że $b \geqslant 4$ – patrz twierdzenie 1). Na drodze eksperymentów komputerowych otrzymaliśmy

$$d(13,8) = 63; \quad d(14,9) = 54; \quad d(18,11) = 108.$$

Niestety, nie potrafimy sformułować żadnej hipotezy dotyczącej „wzoru" na $d(a,b)$.