Oczywiście, interesujący nas obszar znajduje się „pod” powyższą prostą, a zatem pierwsza z opisujących go nierówności powstaje poprzez zamianę znaku „=” w powyższej równości na „$\geqslant$”. To samo robimy dla kolejnych sześciu boków wybranego wielokąta.

Gdy już znajdziemy siedem półpłaszczyzn, których przecięcie tworzy interesujący nas wielokąt, możemy w prosty sposób sprowadzić zadanie do programowania liniowego. Najpierw nierówności, które uzyskaliśmy w poprzednim kroku, przedstawiamy w postaci

$$A_i\mathbf{x} + B_i\mathbf{y} \leqslant C_i,$$

gdzie $i \in \{1, \ldots, 7\}$. Wybrany wielokąt wypukły można więc zapisać jako:

$$W = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : A_i\mathbf{x} + B_i\mathbf{y} \leqslant C_i, i = 1, \ldots, 7\}.$$

Zadanie polega, jak pamiętamy, na znalezieniu środka Czebyszewa (x_c, y_c) oraz promienia r koła K o środku w (x_c, y_c) – największego koła mieszczącego się w naszym wielokącie. Mamy zatem trzy nieujemne zmienne (x_c, y_c, r) oraz funkcję celu równą r, którą będziemy maksymalizować na pewnym ograniczonym zbiorze.

Zwróćmy uwagę, że nierówność $A_ix + B_iy \leqslant C_i$ dla każdego punktu (x, y) w kole K zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy spełniona jest nierówność:

$$(*)\quad \sup_{(x,y)}\{A_i(x_c + x) + B_i(y_c + y) : \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant r\} \leqslant C_i.$$

Na mocy nierówności Cauchy'ego–Schwarza dostajemy $A_ix + B_iy \leqslant \sqrt{A_i^2 + B_i^2}\sqrt{x^2 + y^2}$. W tej sytuacji nierówność $(*)$ może zostać zapisana jako

$$A_ix_c + B_iy_c + \sqrt{A_i^2 + B_i^2}r \leqslant C_i,$$

a nasz problem można sformułować w prostej do rozwiązania przez program postaci: „Znajdź trójkę (x_c, y_c, r) w zbiorze

$$\{A_ix_c + B_iy_c + \sqrt{A_i^2 + B_i^2}r \leqslant C_i : i = 1, \ldots, 7\},$$

dla której wartość r jest możliwie największa”.

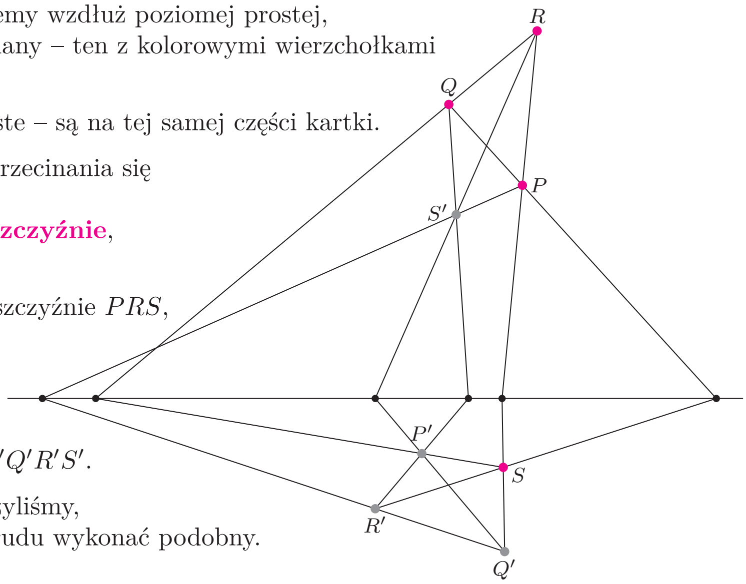
Powyższe zagadnienie można łatwo zaimplementować i szybko obliczyć w programie Sage (`http://sagecell.sagemath.org/?q=egjobr`). Okazuje się, że obliczając w ten sposób, miejsce w Polsce najbardziej oddalone od wszystkich granic jest położone we wsi Jackowice w województwie łódzkim, w odległości 24 km od uważanego za geometryczny środek Polski punktu w miejscowości Piątek.

Programowanie liniowe okazuje się skuteczną i prostą w użyciu metodą rozwiązywania wielu zagadnień. Tutaj pokazaliśmy, jak można stosować tę metodę do rozwiązywania ciekawych zadań geometrycznych, a pośrednio również problemów geograficznych.

Wpisywanie w przestrzeni

W poprzednim numerze przedstawiliśmy cykl wzajemnie wpisanych trójkątów i dwa wzajemnie wpisane pięciokąty. To było na płaszczyźnie. A teraz będzie przykład wzajemnego wpisania w przestrzeni trójwymiarowej.

Jeśli kartkę z widocznym obok rysunkiem zegniemy wzdłuż poziomej prostej, to zobaczymy dwa wzajemnie wpisane czworościany – ten z kolorowymi wierzchołkami i ten z szarymi. Sprawdźmy to.



To, że S' leży na płaszczyźnie PQR jest oczywiste – są na tej samej części kartki.

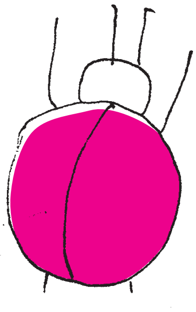
To, że P' leży na płaszczyźnie QRS, wynika z przecinania się prostych $P'S$ i QR, bowiem **przecinające się proste leżą na jednej płaszczyźnie**, zresztą tak samo jest z prostymi równoległymi.

Ten sam argument uzasadnia, że Q' leży na płaszczyźnie PRS, a R' na płaszczyźnie PQS.

Tak więc czworościan $P'Q'R'S'$ jest wpisany w czworościan $PQRS$.

Analogicznie uzasadniamy wpisanie $PQRS$ w $P'Q'R'S'$.

Wypada też zauważyć, że w rysunku, którego użyliśmy, nie ma nic nadzwyczajnego – każdy może bez trudu wykonać podobny.



Oto przepis:
Rysujemy poziomą prostą, a nad nią byle jaki czworokąt, którego ani żaden bok, ani przekątna nie są poziome. I te boki, i przekątne przecinamy poziomą prostą. Następnie dowolnie nazywamy wierzchołki czworokąta literami P, Q, R, S'.
Teraz po drugiej stronie poziomej prostej obieramy dowolnie punkt P' i łączymy go prostymi z jej punktami przecięcia z prostymi QR, RS' i $S'Q$. Na ostatniej z tak powstałych prostych obieramy dowolnie punkt R' i łączymy go prostą z punktem przecięcia prostej poziomej z prostą PS'. „Przy okazji” powstał punkt Q'. Gdy połączymy go z punktem przecięcia prostej poziomej z prostą PR, powstanie punkt S. Ku naszemu zaskoczeniu prosta $R'S$ trafi tam, gdzie należy.

M. K.