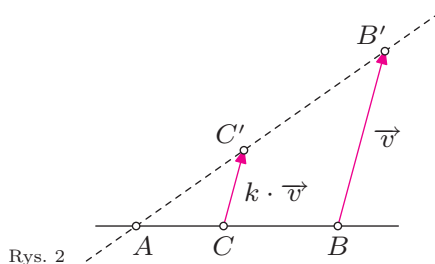
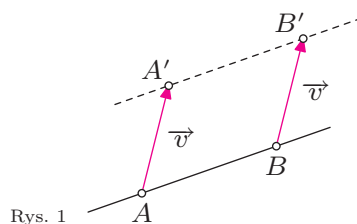


# Przesuwanie w zadaniach olimpijskich

Michał KIEZA

W tym artykule omówimy pewną bardzo pożyteczną technikę – tzw. *przesuwanie*. Polega ona na tym, że niektóre obiekty przesuwamy o pewien wektor i udowadniamy, że teza zadania jest niezmiennicza ze względu na wykonanie tej operacji. Ta metoda pozwala na sprowadzenie rozwiązywanego zadania do znacznie prostszego. Bardzo często ten prostszy przypadek ma jakiś rodzaj symetrii, z której łatwo wywnioskować tezę. Zanim przejdziemy do rozwiązywania zadań, odnotujmy dwie proste własności opisanej operacji.

**Własność 1.** Jeśli punkty  $A$  i  $B$  przesuniemy o wektor  $\vec{v}$ , otrzymując punkty  $A'$  i  $B'$ , to przesunięcie prostej  $AB$  o wektor  $\vec{v}$  da nam w rezultacie prostą  $A'B'$  (rys. 1).



**Własność 2.** Dane są punkty  $A$  i  $B$  oraz taki punkt  $C$  na prostej  $AB$ , że  $\frac{CA}{BA} = k$ . Jeśli punkt  $B$  przesuniemy o wektor  $\vec{v}$ , otrzymując punkt  $B'$ , a punkt  $C$  na prostej  $AB'$  spełnia  $\frac{C'A}{B'A} = k$ , to  $\vec{CC'} = k \cdot \vec{v}$  (rys. 2).

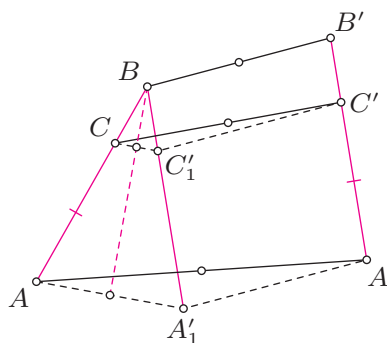
Łatwe dowody powyższych własności pozostawiamy Czytelnikowi. Zauważmy w szczególności, że z drugiej własności wynika, iż środek odcinka  $AB$  przesunie się o wektor  $\frac{1}{2}\vec{v}$ , zaś punkt symetryczny do  $B$  względem punktu  $A$  o wektor  $-\vec{v}$ .

Uzbrojeni w tytułową metodę i powyższe własności możemy przejść do rozwiązania kilku przykładów.

**Przykład 1.** (Twierdzenie Hjelmsleva) Dane są dwa odcinki  $AB$  i  $A'B'$  jednakowej długości. Punkty  $C$  i  $C'$  leżą odpowiednio na odcinkach  $AB$  i  $A'B'$ , przy czym  $AC = A'C'$ . Udowodnić, że środki odcinków  $AA'$ ,  $BB'$  i  $CC'$  leżą na jednej prostej.

*Rozwiązanie.* Jeśli przesuniemy odcinek  $A'B'$  o pewien wektor  $\vec{v}$ , to punkt  $C'$  także przesunie się o wektor  $v$ . Ponadto środki odcinków  $AA'$ ,  $BB'$  i  $CC'$  przesuną się o wektor  $\frac{1}{2}\vec{v}$ . Zatem operacja przesuwania nie wpływa na prawdziwość tezy.

Przesuniemy zatem odcinek  $A'B'$  o wektor  $\vec{B'B}$  (rys. 3). Obrazem punktu  $B'$  jest, oczywiście, punkt  $B$ , zaś niech  $A_1$  i  $C_1$  będą obrazami odpowiednio punktów  $A'$  i  $C'$



Rys. 3

w tym przesunięciu. Wystarczy udowodnić, że punkt  $B$  oraz środki odcinków  $CC_1$  i  $AA_1$  są współliniowe. Jednakże z równości

$$AB = A'B' = A_1B \quad \text{oraz} \quad AC = A'C' = A_1C_1$$

i twierdzenia Talesa wynika, że odcinki  $AA_1$  i  $CC_1$  są równoległe, a więc ich środki leżą na środkowej trójkąta  $AA_1B$ .

Twierdzenie Hjelmsleva można również sprawnie udowodnić, powołując się na fakt istnienia *symetrii z poślizgiem* (czyli złożenia symetrii i przesunięcia), która przekształca punkty  $A, B, C$  odpowiednio na  $A', B', C'$ . Wystarczy zauważyć, że wspomniane w treści środki boków muszą leżeć na osi wykorzystanej symetrii.

Nietrudno zauważyć, że opisaną metodą można rozwiązać zadanie ogólniejsze.

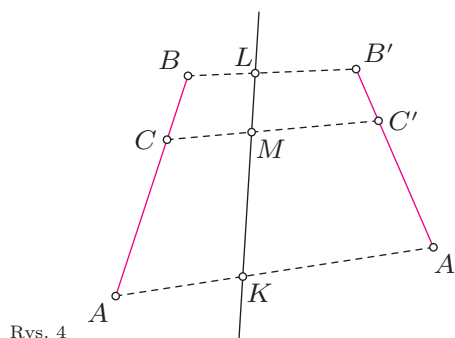
Dane są dwa odcinki  $AB$  i  $A'B'$  (rys. 4). Punkty  $C$  i  $C'$  leżą odpowiednio na odcinkach  $AB$  i  $A'B'$ , przy czym

$$\frac{AC}{BC} = \frac{A'C'}{B'C'}$$

Niech  $K, L, M$  będą takimi punktami leżącymi odpowiednio na odcinkach  $AA'$ ,  $BB'$  i  $CC'$ , że

$$\frac{AK}{A'K} = \frac{BL}{B'L} = \frac{CM}{C'M}$$

Wykazać, że punkty  $K, L$  i  $M$  leżą na jednej prostej.



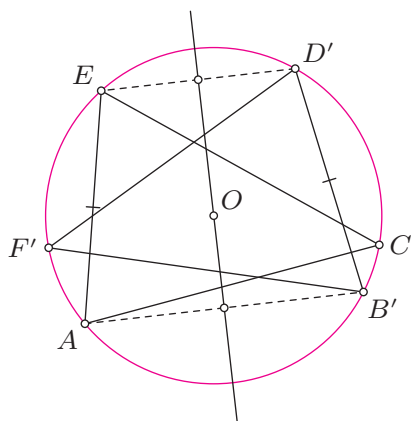
Rys. 4

Przejdźmy teraz do następnego przykładu.

**Przykład 2.** (III etap 57 OM) Dany jest sześciokąt wypukły  $ABCDEF$ , w którym  $AC = DF$ ,  $CE = FB$  oraz  $EA = BD$ . Dowieść, że proste łączące środki przeciwległych boków tego sześciokąta przecinają się w jednym punkcie.

*Rozwiązanie.* Zauważmy, że jeśli przesuniemy trójkąt  $BDF$  o wektor  $\vec{v}$ , to środki wszystkich boków sześciokąta  $ABCDEF$  przesuną się o wektor  $\frac{1}{2}\vec{v}$ . W takim razie każda z rozważanych w treści zadania prostych przesunie się także o wektor  $\frac{1}{2}\vec{v}$ , więc teza zadania jest niezmiennicza ze względu na tę operację.

Skoro trójkąty  $ACE$  i  $BDF$  są przystające, to mają jednakowe okręgi opisane (rys. 5). Przesunąć więc tak trójkąt  $BDF$ , aby rozważane okręgi pokryły się. Niech  $O$  będzie środkiem okręgu opisanego na trójkącie  $ACE$ , zaś  $B'D'F'$  obrazem trójkąta  $BDF$  w tym przesunięciu. Wystarczy udowodnić, że każda z prostych łączących środki przeciwległych boków sześciokąta  $AB'CD'EF'$  przechodzi przez punkt  $O$ .



Rys. 5

Skoro  $AE = BD = B'D'$ , to czworokąt  $AB'D'E$  jest trapezem równoramiennym o podstawach  $AB'$  i  $D'E$ . Prosta łącząca środki boków  $AB'$  i  $D'E$  jest jego osią symetrii, a więc na niej musi leżeć środek okręgu opisanego na tym trapezie, czyli punkt  $O$ . Analogicznie dowodzimy, że punkt  $O$  należy do dwóch pozostałych prostych łączących środki przeciwległych boków sześciokąta  $AB'CD'EF'$ .

W kolejnym przykładzie przekonamy się, że metoda przesuwania może być także skuteczna w zadaniach o polach.

**Przykład 3.** W sześciokącie wypukłym  $ABCDEF$  przeciwległe boki są równoległe. Udowodnić, że trójkąty  $ACE$  i  $BDF$  mają równe pola.

*Rozwiązanie.* Wykażemy najpierw, że przesunięcie trójkąta  $BCD$  o wektor  $\vec{v}$  równoległy do boków  $AB$  i  $DE$  nie ma wpływu na prawdziwość tezy (rys. 6 i rys. 7). Niech bowiem  $h$  będzie odległością między prostymi  $AB$  i  $DE$ , zaś  $C_1$  i  $F_1$  takimi punktami odpowiednio na bokach  $AE$  i  $BD$ , że proste  $CC_1$ ,  $FF_1$  są równoległe do prostej  $AB$ . Wtedy przed przesunięciem mamy

$$\Delta ACE = \frac{1}{2}CC_1 \cdot h \quad \text{oraz} \quad \Delta BDF = \frac{1}{2}FF_1 \cdot h,$$

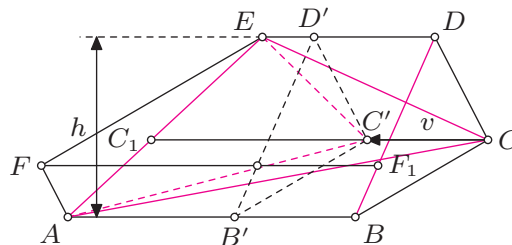
zaś po przesunięciu oba pola wynoszą odpowiednio

$$\frac{1}{2}(CC_1 \pm v) \cdot h \quad \text{oraz} \quad \frac{1}{2}(FF_1 \pm v) \cdot h$$

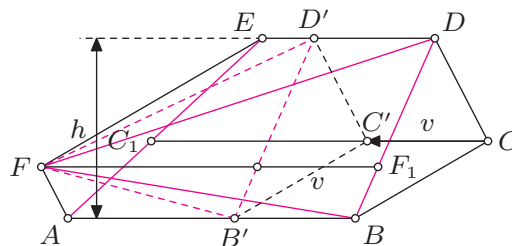
albo

$$\frac{1}{2}CC_1 \cdot h \pm \frac{1}{2}v \cdot h \quad \text{oraz} \quad \frac{1}{2}FF_1 \cdot h \pm \frac{1}{2}v \cdot h.$$

Innymi słowy, podczas opisanej operacji oba pola zmieniają się o jednakową wielkość, a więc są równe przed przesunięciem wtedy i tylko wtedy, gdy są równe po przesunięciu.



Rys. 6



Rys. 7

Przyjmijmy bez straty dla ogólności, że  $AB \geq DE$  i przesunąć trójkąt  $BCD$  o wektor  $\overrightarrow{DE}$ , otrzymując w wyniku trójkąt  $B'C'E$  (rys. 8). Wobec obserwacji poczynionej w pierwszym akapicie wystarczy udowodnić, że trójkąty  $AC'E$  i  $B'EF$  mają równe pola. Ponieważ przesunięcie zachowuje równoległość, to mamy

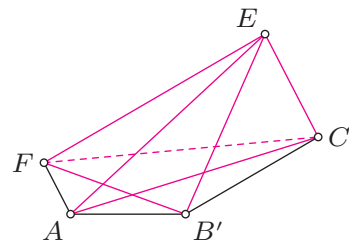
$$B'C' \parallel BC \parallel EF \quad \text{oraz} \quad C'E \parallel DE \parallel AF.$$

W takim razie

$$[AC'E] = [FC'E] = [B'EF].$$

Powyższe rozumowanie pozostaje, oczywiście, prawdziwe, gdy punkty  $A$  i  $B'$  pokrywają się.

Opisane rozwiązanie można dokończyć, inaczej wykonując jeszcze raz operacje z pierwszego akapitu rozwiązania, uzyskując trapez.



Rys. 8

Ostatni nasz przykład dotyczy sumy długości odcinków.

**Przykład 4.** (I etap 52 OM) Okrąg dzieli każdy bok rombu na 3 odcinki. Malujemy otrzymane odcinki kolejno na czerwono, zielono i biało, zaczynając od wierzchołka rombu i poruszając się po jego obwodzie w ustalonym kierunku. Wykazać, że suma długości odcinków czerwonych jest równa sumie długości odcinków białych.

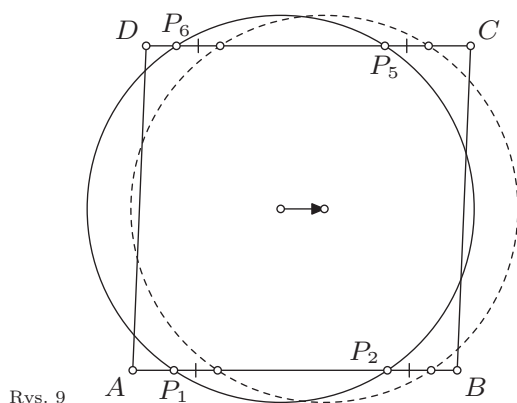
*Rozwiązanie.* Niech  $ABCD$  będzie danym rombem. Oznaczmy przez  $P_1, P_2, \dots, P_8$  kolejne punkty przecięcia danego okręgu z bokami rombu. Należy wykazać, że

$$AP_1 + BP_3 + CP_5 + DP_7 = BP_2 + CP_4 + DP_6 + AP_8$$

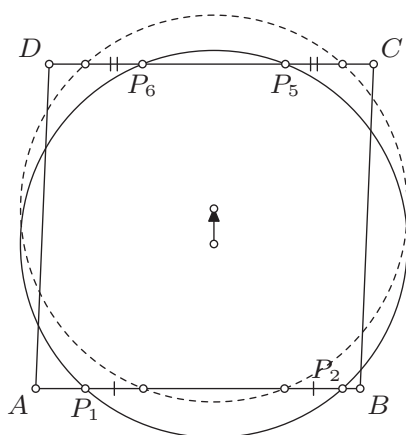
albo

$$AP_1 + CP_5 - BP_2 - DP_6 = AP_8 + CP_4 - BP_3 - DP_7.$$

Jeśli przesuniemy dany okrąg o pewien wektor  $\vec{v}$  równoległy do boku  $AB$  (rys. 9), to odcinki  $AP_1$  i  $DP_6$  wzrosną o  $v$  (albo zmaleją, jeśli zwrot był przeciwny do zwrotu wektora  $\vec{AB}$ ), zaś odcinki  $BP_2$  i  $CP_5$  zmaleją o  $v$  (albo wzrosną, jeśli zwrot był przeciwny do zwrotu wektora  $\vec{AB}$ ). W takim razie przy takiej operacji liczba  $AP_1 + CP_5 - BP_2 - DP_6$  nie zmienia się. Jeśli teraz przesuniemy dany okrąg o pewien wektor  $\vec{v}$  prostopadły do boku  $AB$  (rys. 10), to odcinki  $AP_1$  i  $BP_2$  wzrosną o pewną wartość, zaś odcinki  $CP_5$  i  $DP_6$  zmaleją o pewną wartość (lub na odwrót w obu przypadkach, gdy zwrot wektora jest w kierunku  $AB$ ). Zatem i w tym przypadku liczba  $AP_1 + CP_5 - BP_2 - DP_6$  nie zmienia się. Skoro dowolny wektor można przedstawić w postaci sumy wektora równoległego do  $AB$  i prostopadłego do  $AB$ , to przesuwanie danego okręgu nie zmienia wartości sumy  $AP_1 + CP_5 - BP_2 - DP_6$ . To samo dotyczy sumy  $AP_8 + CP_4 - BP_3 - DP_7$ .



Rys. 9



Rys. 10

Przesuniemy zatem tak dany okrąg, aby jego środek pokrył się ze środkiem danego rombu. Wobec poprzednich rozważań wystarczy dowieść tezy w tym przypadku. To jednak natychmiast wynika z symetrii problemu.

Na koniec przedstawiamy kilka zadań, które można rozwiązać opisaną metodą.

### Zadania

1. (I etap 62 OM) W czworokącie wypukłym  $ABCD$  punkty  $M$  i  $N$  są odpowiednio środkami boków  $AB$  i  $CD$ , zaś przekątne przecinają się w punkcie  $E$ . Wykazać, że prosta zawierająca dwusieczną kąta  $BEC$  jest prostopadła do prostej  $MN$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $AC = BD$ .

2. (APZM 2005) Dany jest czworokąt  $ABCD$ , w którym  $BC = AD$ . Na bokach  $BC$  i  $AD$  zbudowano na zewnątrz takie trójkąty  $BEC$  i  $AFD$ , że  $BE = AF$  oraz  $CE = DF$ . Udowodnić, że środki odcinków  $AB$ ,  $EF$  i  $CD$  leżą na jednej prostej.

3. Na płaszczyźnie dane są kwadraty  $ABCD$  oraz  $A'B'C'D'$ , przeciwnie zorientowane o bokach odpowiednio długości  $a$  i  $b$ . Punkty  $K, L, M, N$  leżą odpowiednio na odcinkach  $AA', BB', CC', DD'$ , przy czym

$$\frac{AK}{KA'} = \frac{BL}{LB'} = \frac{CM}{MC'} = \frac{DN}{ND'} = \frac{a}{b}.$$

Dowieść, że punkty  $K, L, M$  i  $N$  leżą na jednej prostej.

4. Częścią wspólną dwóch jednakowych kwadratów jest ośmiokąt. Boki jednego z kwadratów zostały narysowane na czerwono, drugiego zaś na niebiesko. Udowodnić, że suma długości czerwonych boków ośmiokąta jest równa sumie długości niebieskich boków.

5. Płaszczyzna przecina krawędzie boczne graniastoslupa prostego o podstawie równoległoboku, tworząc w przekroju czworokąt wypukły  $D_1D_2D_3D_4$ . Niech  $d_i$  ( $1 \leq i \leq 4$ ) będzie odległością punktu  $D_i$  od płaszczyzny ustalonej podstawy graniastoslupa. Udowodnić, że

$$d_1 + d_3 = d_2 + d_4.$$

6. (I etap 53 OM) Płaszczyzna przecina krawędzie boczne graniastoslupa prawidłowego sześciokątnego, tworząc w przekroju sześciokąt wypukły  $D_1D_2 \dots D_6$ . Niech  $d_i$  ( $1 \leq i \leq 6$ ) będzie odległością punktu  $D_i$  od płaszczyzny ustalonej podstawy graniastoslupa. Dowieść, że

$$d_1^2 + d_3^2 + d_5^2 = d_2^2 + d_4^2 + d_6^2.$$

### Wskazówki

1. Przesuń punkty  $B$  i  $D$  o wektor  $\vec{DC}$ .
2. Przesuń wierzchołki trójkąta  $BCE$  o wektor  $\vec{CD}$ .
3. Przesuń wierzchołki kwadratu  $A'B'C'D'$  tak, by punkt  $A'$  przeszedł na punkt  $A$ .
4. Przesuń jeden kwadrat tak, aby jego środek pokrył się ze środkiem drugiego kwadratu.
5. Wykaż, że czworokąt  $D_1D_2D_3D_4$  jest równoległobokiem i przesuń go tak, aby jego środek pokrył się ze środkiem podstawy.
6. Udowodnij najpierw, że  $d_1 + d_3 + d_5 = d_2 + d_4 + d_6$  (wykorzystaj poprzednie zadanie).