Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 III 2018

Zadania z matematyki nr 753, 754

Redaguje Marcin E. KUCZMA

753. Wewnątrz trójkąta ABC leży punkt D. Proste AD i BD przecinają boki BC i AC odpowiednio w punktach E i F. Udowodnić, że jeśli $|AE|+|AF|=|BE|+|BF|$, to $|AC|+|AD|=|BC|+|BD|$.

754. Znaleźć wszystkie trójki liczb rzeczywistych $x, y, z \geqslant 0$, spełniające układ równań

$$x+y+z=1, \qquad 9(xy+yz+zx)=2+9(x^3+y^3+z^3).$$

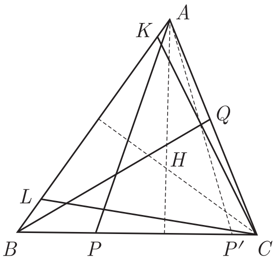
Zadanie 754 zaproponował pan Mikołaj Pater.

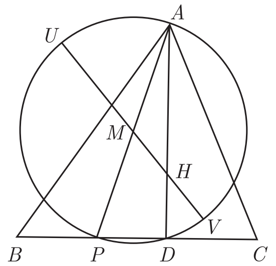
Rozwiązania zadań z numeru 9/2017

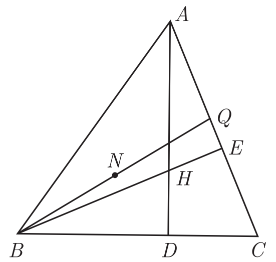
Przypominamy treść zadań:

745. Na obwodzie trójkąta ABC leżą punkty K, L, P, Q: punkty K, L na boku AB, punkty P i Q odpowiednio na bokach BC i CA; przy tym odcinki AP, BQ, CK i CL mają jednakową długość. Udowodnić, że środki tych czterech odcinków leżą na jednym okręgu.

746. Dana jest liczba naturalna $k \geqslant 2$. Czy istnieje rosnący ciąg liczb naturalnych (a_n), którego żaden wyraz ani żadna suma skończenie wielu jego wyrazów nie jest k-tą potęgą liczby naturalnej, a przy tym ciąg $\left(\sqrt[n]{a_n}\right)$ jest ograniczony?







745. Jeśli teza zadania ma być prawdziwa, to powinna ona zachować słuszność po zastąpieniu punktu P przez P' – drugi punkt prostej BC, leżący w tej samej odległości od A, co punkt P; zaś środek szukanego okręgu powinien leżeć na osiach symetrii trójkątów równoramiennych CKL i APP' – czyli na wysokościach trójkąta ABC. Stąd domysł uściślenia tezy zadania: wykazać, że środki odcinków AP, BQ, CK, CL (o jednakowej długości $2r$) leżą na okręgu o środku H (ortocentrum trójkąta ABC).

Niech D będzie spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka A i niech M będzie środkiem odcinka AP. Weźmy pod uwagę okrąg o środku M i promieniu r (czyli o średnicy AP). Prosta HM przecina ów okrąg w punktach U, V (gdy punkty M, H pokrywają się, przyjmijmy $U=A$, $V=D$). Cięciwa AD tego okręgu oraz jego średnica UV przecinają się w punkcie H. Zatem

$$|AH|\cdot|HD| = |UH|\cdot|HV| = (r-|HM|)(r+|HM|),$$

czyli

$$|HM| = \sqrt{r^2-|AH|\cdot|HD|}.$$

Jeśli teraz BE jest drugą wysokością trójkąta ABC, a N jest środkiem odcinka BQ, to analogicznie uzyskujemy równość

$$|HN| = \sqrt{r^2-|BH|\cdot|HE|}.$$

Ale $|AH|\cdot|HD| = |BH|\cdot|HE|$; wynika to z podobieństwa trójkątów AHE i BHD. Tak więc $|HM|=|HN|$; środki odcinków AP i BQ leżą w jednakowej odległości od punktu H. Analogicznie, w tej samej odległości od H leżą też środki odcinków CK i CL. To właśnie nasza teza.

746. Istnieje. Przykład Autora (W. Bednarek): ciąg $a_n = 2^{kn+1}$.

Bierzemy dowolnie utworzoną sumę skończenie wielu wyrazów, o numerach $m_1 < \ldots < m_s$:

$$S = \sum_{i=1}^{s} a_{m_i} = \sum_{i=1}^{s} 2^{km_i+1} = 2^{km_1+1}\left(\sum_{i=1}^{s} 2^{k(m_i-m_1)}\right).$$

Suma w dużym nawiasie jest liczbą nieparzystą (jej pierwszy składnik to jedynka). Gdyby dla pewnej liczby naturalnej A zachodziła równość $S=A^k$, wówczas pisząc A w postaci $A=2^tM$ (M nieparzyste) i przyrównując potęgi dwójki w S i w A^k uzyskalibyśmy równość $kt = km_1+1$; oczywista sprzeczność.

Pozostaje zauważyć, że ciąg o wyrazach $a_n^{1/n} = 2^k\cdot 2^{1/n} \leqslant 2^{k+1}$ jest ograniczony.

Zadania z fizyki nr 650, 651

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 III 2018

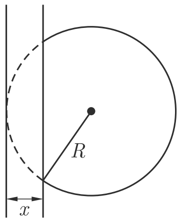
650. Radar na Ziemi obserwuje dwa pojazdy kosmiczne poruszające się z relatywistycznymi prędkościami. Pojazd A porusza się z prędkością v_1, goni go pojazd B, poruszający się w tym samym kierunku z prędkością $v_2 > v_1$. W chwili początkowej odległość między pojazdami wynosi l. Po jakim czasie pojazd B dogoni A z punktu widzenia obserwatora na Ziemi oraz z punktu widzenia kosmonauty w pojeździe B?

651. Dwie jednakowo naładowane kulki o takich samych masach umieszczono w odległości l od siebie i puszczono swobodnie. Po czasie t odległość między nimi wzrosła dwukrotnie. Po jakim czasie wzrośnie dwukrotnie odległość między tymi kulkami, gdy ich odległość początkowa będzie wynosić $3l$?

Rozwiązania zadań z numeru 9/2017

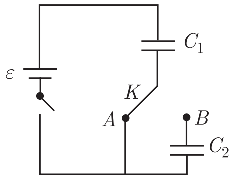
Przypominamy treść zadań:

642. Piłka o promieniu R słabo uderza w ścianę i deformuje się, jak pokazano na rysunku 1. Deformacja x jest dużo mniejsza od promienia piłki i możemy przyjąć, że ciśnienie powietrza w piłce nie zmienia się podczas uderzenia. Zaniedbując sprężystość powłoki, oszacować czas zderzenia piłki ze ścianą. Masa piłki wynosi m, ciśnienie powietrza w piłce p, ciśnienie atmosferyczne p_0.



Rys. 1

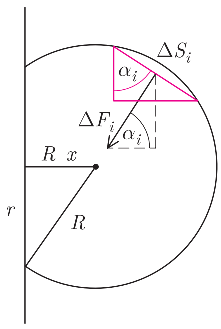
643. Układ składający się z dwóch kondensatorów o tej samej pojemności ($C_1 = C_2$) i klucza K łączymy ze źródłem napięcia o sile elektromotorycznej ε (rys. 2). Wielokrotnie zmieniamy położenie klucza K, łącząc kondensator C_1 kolejno ze stykami A i B. Jak zmienia się napięcie na kondensatorze C_2 po każdym przełączeniu klucza? Rozważyć przypadki:
a) w chwili dołączenia źródła napięcia klucz znajdował się w położeniu A;
b) w chwili dołączenia źródła napięcia klucz znajdował się w położeniu B.



Rys. 2

642. Podczas zderzenia na piłkę działa siła reakcji ściany F_R oraz siła F_0 spowodowana ciśnieniem atmosferycznym. Zgodnie z trzecią zasadą dynamiki siła reakcji równa jest co do wartości sile nacisku piłki na ścianę. Ponieważ możemy zaniedbać sprężystość powłoki, więc $F_R = \pi r^2 p$, gdzie r jest promieniem powierzchni zetknięcia piłki ze ścianą (rys. 3). W celu znalezienia siły F_0 podzielmy myślowo powierzchnię piłki stykającą się z powietrzem na małe elementy o powierzchni ΔS_i. Na każdy element działa prostopadle do niego siła $\Delta F_i = p_0 \Delta S_i$. Wobec symetrii składowe równoległe do ściany wszystkich tych sił znoszą się, siła F_0 skierowana jest prostopadle w kierunku ściany i ma wartość $F_0 = \Sigma_i \Delta F_i \cos\alpha_i = p_0 \Sigma_i \Delta S_i \cos\alpha_i$. Z rysunku 3 widać, że wielkość $\Delta S_i \cos\alpha_i$ jest rzutem i-tego elementu powierzchni na płaszczyznę pionową, a suma tych wielkości równa jest powierzchni styku piłki ze ścianą. Stąd $F_0 = \pi r^2 p_0$. Wypadkowa siła działająca na piłkę wynosi zatem

$$F = F_R - F_0 = \pi\big(R^2 - (R-x)^2\big)(p-p_0) = \pi(2Rx - x^2)(p-p_0).$$



Rys. 3

Wobec $x \ll R$, mamy $F = 2\pi R(p-p_0)x$, a zwrot F jest przeciwny do deformacji x. W rozważanym przybliżeniu piłka podczas zderzenia ze ścianą porusza się ruchem harmonicznym z okresem $T = 2\pi\sqrt{m/k}$, gdzie $k = 2\pi R(p-p_0)$. Czas zderzenia piłki ze ścianą równy jest połowie okresu:

$$t = \sqrt{\frac{\pi m}{2R(p-p_0)}}.$$

643. a) Gdy klucz znajduje się w położeniu A, potencjał dolnej okładki kondensatora C_2 jest taki sam jak potencjał klucza. Napięcie na kondensatorze C_2 nie zmienia się i wynosi 0.
b) W chwili początkowej napięcia na obu kondensatorach wynoszą $U_1 = \varepsilon/2$. Po przełączeniu klucza do punktu A kondensator C_1 ładuje się do napięcia ε. Po ponownym przełączeniu do punktu B przez źródło przepływa ładunek, napięcie na obu kondensatorach maleje o tę samą wartość ΔU. Zgodnie z prawem Kirchhoffa $\varepsilon - (\varepsilon - \Delta U) - (\varepsilon/2 - \Delta U) = 0$. Stąd $\Delta U = \varepsilon/4$, napięcie na drugim kondensatorze wynosi $U_2 = \varepsilon/4$. Rozumując analogicznie, otrzymujemy, że po drugim powrocie klucza do położenia B napięcie na kondensatorze C_2 wynosi $U_3 = \varepsilon/8$, a po n-tym powrocie $U_n = \varepsilon/2^n$. Po odpowiednio długim czasie dolny kondensator rozładuje się.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
637 ($WT = 2{,}02$), 638 ($WT = 2{,}9$),
639 ($WT = 2{,}0$)
z numerów 4 i 5/2017

Jan Zambrzycki	Białystok	42,42
Marian Łupieżowiec	Gliwice	38,33
Tomasz Rudny	Gliwice	37,68
Jacek Konieczny	Poznań	29,80
Ryszard Woźniak	Kraków	28,77

Zadanie 636 nie mogło zostać sprawdzone, ponieważ rysunek do treści tego zadania wykonany został nieprawidłowo (zmieniony został kierunek przewodzenia diody), przez co zadanie straciło sens. Przepraszamy.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
743 ($WT = 1{,}24$) i 744 ($WT = 2{,}74$)
z numeru 6/2017

Patryk Jaśniewski	Gdańsk	45,10
Marcin Kasperski	Warszawa	43,83
Adam Dzedzej	Gdańsk	43,22
Roksana Słowik	Knurów	41,91
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	39,71
Krzysztof Maziarz	Kraków	37,45

Wreszcie – po przeszło dwóch latach – mamy uczestnika, który zalicza 44 p. po raz pierwszy: Patryk Jaśniewski. Witamy w Klubie 44, z numerem 127.