Języki obce

Joanna JASZUŃSKA

Czasem warto przetłumaczyć problem na inny język, aby łatwiej go rozwiązać.

System dziesiętny używa 10 cyfr (od 0 do 9) w taki sposób:

$$207 = 2 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0.$$

Nieujemne liczby mniejsze od 10^n wymagają najwyżej n cyfr.

Podobnie w innych systemach, np. w dwójkowym są 2 cyfry (0 i 1), a liczba 5 wygląda tak:

$$101 = 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0.$$

Nieujemne liczby mniejsze od 2^n wymagają najwyżej n cyfr.

1. W grze w 20 pytań gracz A wybiera słowo (ze słownika zawierającego ich najwyżej milion), po czym gracz B zadaje pytanie typu tak/nie. Po usłyszeniu odpowiedzi, B zadaje kolejne pytanie itd. Gracz B wygrywa, jeśli po uzyskaniu 20 odpowiedzi odgadnie słowo wybrane przez A. Wykaż, że B zawsze może wygrać.

2. W grze w 20 pytań wprowadzono nową regułę: gracz B ma zadać wszystkie 20 pytań jednocześnie, zanim usłyszy odpowiedzi. Czy nadal B zawsze może wygrać?

3. Mamy talię 27 kart. Ktoś potajemnie wybiera jedną z nich i mówi, ile kart ma się znaleźć przed nią w talii. Możemy trzykrotnie rozdać karty na trzy stosy po 9, dowiedzieć się, w którym z nich jest wybrana karta i złożyć te trzy stosy znów w jeden. Jak wykryć wybraną kartę i ustawić ją na żądanej pozycji?

4. Oblicz $2^n + 2^{n-1} + \ldots + 2^2 + 2^1 + 2^0$ oraz $7^n + 7^{n-1} + \ldots + 7^2 + 7^1 + 7^0$.

Rozwiązania

R1. Gracz B najpierw pyta, czy wybrane słowo jest w pierwszej połowie słownika. Potem pyta, czy jest ono w pierwszej połowie odpowiednio pierwszej lub drugiej połowy itd.; w każdym kolejnym pytaniu dwukrotnie zawęża obszar poszukiwań. Ponieważ $1\,000\,000 < 2^{20}$, więc 20 pytań wystarczy, by zostało tylko jedno słowo. $\square$

Krąży anegdota o teleturnieju bazującym na grze w 20 pytań, w którym zespół matematyków zastosował opisaną tu strategię. Podobno był to ostatni odcinek tego turnieju... Co więcej, ponieważ wystarczało tam 19 pytań, matematycy ponoć zaczęli od: *Czy wybrane słowo to „żaba"?*

R2. Nic się nie zmienia, gracz B gra jak dotychczas: numeruje słowa w systemie dwójkowym (wystarcza do tego 20 cyfr) i w n-tym pytaniu pyta, czy na n-tym miejscu w numerze wybranego słowa jest cyfra 0. $\square$

R3. Przypuśćmy, że przed wybraną kartą ma być 7 innych; w systemie trójkowym 7 to 021 (i dowolną liczbę od 0 do 26 też można zapisać jako 3-cyfrową). Trzykrotnie rozdajemy karty na 3 stosy i kolejno składamy je tak, by za pierwszym razem wskazany stos był w środku, za drugim na dole, a za trzecim – na górze (cyfry 021 czytamy od końca: 1 oznacza środek, 2 – dół, 0 – górę; rys. 1).

1	10	19
2	11	20
3	12	21
4	13	22
5	14	23
6	15	24
7	16	25
8	17	26
9	18	27

(a)

1	2	3
4	5	6
7	8	9
19	20	21
22	23	24
25	26	27
10	11	12
13	14	15
16	17	18

(b)

2	5	8
20	23	26
11	14	17
3	6	9
21	24	27
12	15	18
1	4	7
19	22	25
10	13	16

(c)

Rys. 1. (a) Stos z wybraną kartą (25) składamy jako środkowy i rozdajemy – 25 trafi do środkowej trójki w swoim nowym stosie.
(b) Stos z kartą 25 składamy jako dolny i rozdajemy – 25 trafi jako środkowa karta ostatniej trójki swojego nowego stosu.
(c) Stos z 25 składamy jako górny – przed 25 jest 0 dziewiątek, 2 trójki i 1 jedynka (czyli 7 kart).

Dlaczego ta metoda działa? Przy ostatnim składaniu stosów kart, wybrana karta trafia do odpowiedniej z trzech dziewiątek (u nas do górnej), gdyż pierwsza cyfra zapisu trójkowego koduje, ile dziewiątek kart ma być przed wybraną (u nas zero).

We wcześniejszym ruchu, w ramach tejże dziewiątki wybrana karta trafiła do odpowiedniej z trzech trójek, gdyż środkowa cyfra zapisu trójkowego właśnie to koduje. Podobnie w pierwszym ruchu karta została ustawiona na odpowiednim z trzech miejsc w ramach swojej trójki, zgodnie z trzecią cyfrą zapisu. $\square$

R4. Łatwo obliczyć $10^n + \ldots + 10^2 + 10^1 + 10^0 = 100\ldots0 + \ldots + 100 + 10 + 1 = 11\ldots1$. Podobnie szukane sumy równe są $11\ldots1$ w odpowiednich systemach pozycyjnych. W dwójkowym liczba $11\ldots1$ jest jak $99\ldots9$ w dziesiętnym, więc pierwsza z sum to $2^{n+1} - 1$. Analogicznie dla drugiej sumy: w systemie siódemkowym $11\ldots1 = \frac{1}{6} \cdot 66\ldots6$ równe jest $\frac{1}{6}(7^{n+1} - 1)$ w dziesiętnym. $\square$

Zadania domowe

5. Jak w 10 ponumerowanych kopertach rozmieścić w sumie równo 1000 zł, aby móc zapłacić dowolną całkowitą kwotę od 0 do 1000 zł bez otwierania kopert?

6. W każde pole tablicy 4×4 należy wpisać pewną liczbę całkowitą w taki sposób, aby sumy liczb w każdej kolumnie i w każdym wierszu były potęgami liczby 2 o wykładniku całkowitym nieujemnym. Czy można to zrobić w taki sposób, aby każde dwie z tych ośmiu sum były różne?

Wskazówka. Warto rozważyć zapis dwójkowy sumy wszystkich liczb w tablicy.

7. Wykaż, że $(1+q)(1+q^2)(1+q^{2^2}) \cdot \ldots \cdot (1+q^{2^n}) = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{2^{n+1}-1}$.

8. Ciąg liczb całkowitych $(a_n)_{n \geqslant 0}$ definiujemy rekurencyjnie: $a_0 = 0$, $a_{2n} = 3a_n$, $a_{2n+1} = 3a_n + 1$. Scharakteryzuj wszystkie liczby całkowite $s \geqslant 0$, dla których istnieje dokładnie jedna para (k, l) spełniająca warunki $k > l$ oraz $a_k + a_l = s$.

Wskazówka. Dla wyznaczenia a_n należy zapisać liczbę n w systemie dwójkowym i odczytać w trójkowym.

Zadanie 6 pochodzi z XII Olimpiady Matematycznej Juniorów.
Jeszcze jeden przykład zastosowania systemu dwójkowego opisano w *deltoidzie* 10/2017.