mała delta

Niemożliwe!

– Lolek, chodź, pokażę Ci jedną stronę w Internecie…

– No, co tam masz? Bolek, wyłącz tego Reksia. Mama mówiła, że nie wolno nam oglądać konkurencji!

– Nie, nie to. Tutaj, w drugiej zakładce. Ktoś na tym forum napisał fajne zadanie. Czytaj.

– Jeżeli sześcian w przestrzeni ma wszystkie wierzchołki w punktach kratowych, to jego krawędź ma całkowitą długość.

Zacząłbyś czytać jakieś porządne fora. Przecież to jest oczywista bzdura.

– Niby czemu?

– Bolek, nie widzisz, skąd to się wzięło? Ktoś pomyślał, że taki sześcian musi mieć krawędzie równoległe do osi współrzędnych. I wtedy to prawda. Ale przecież można wziąć obrócony sześcian, o, zaraz Ci taki jeden narysuję. Proszę! Ma wierzchołki w punktach kratowych? Ma!

– Loluś, ale on akurat ma krawędź całkowitej długości…

– No nie żartuj… $\sqrt{8^2+4^2+1^2}=\sqrt{81}=9$… rzeczywiście! Patrz, jak mi się przyfarciło! Ale chyba widzisz, że można trochę poeksperymentować ze współrzędnymi i przykład wyjdzie. Poza tym *moralnie* to nie może być prawda.

– Moralnie?

– Tak, bo na płaszczyźnie to nieprawda. Zdanie *jeżeli kwadrat na płaszczyźnie ma wszystkie wierzchołki w punktach kratowych, to jego bok ma całkowitą długość* jest fałszywe: bez problemu można narysować taki kwadrat o boku $\sqrt{5}$ albo nawet $\sqrt{2}$.

– I jak to się ma do sześcianu?

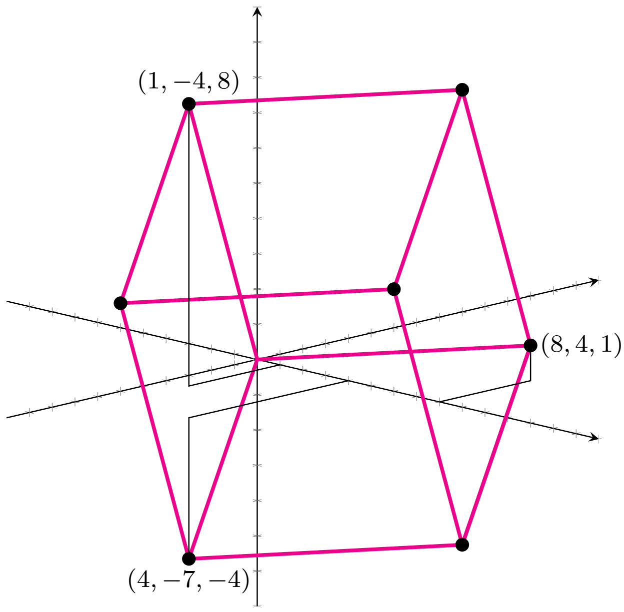
– Tak od razu to nijak. Ale mówiłem, że to moralny argument: skoro na płaszczyźnie analogiczne twierdzenie nie zachodzi, to co dopiero w przestrzeni, gdzie można dużo dowolniej manipulować współrzędnymi!

– Mnie te moralne argumenty jakoś nie przekonują. Na prostej wszystko gra.

– Na prostej?

– No tak, zobacz: *jeżeli odcinek na prostej ma oba końce w punktach kratowych, to jego długość jest liczbą całkowitą.*

– Teraz to ale Amerykę odkryłeś… Dobra, już dobra, skonstruuję Ci precyzyjny kontrprzykład.



Jaką długość krawędzi byś chciał?

– To ja poproszę $\sqrt{117}=3\sqrt{13}$.

– Ambitnie! Ale dobra, niech będzie. Więc tak: jeden wierzchołek będzie w punkcie $0=(0,0,0)$, następny w jakimś punkcie odległym o $\sqrt{117}$, na przykład… $u=(10,4,1)$. Teraz zgadniemy sobie jakiś wektor v prostopadły do u i tej samej długości. Powiedzmy, no… czekaj… mam: $v=(2,-7,8)$.

– Na pewno są prostopadłe?

– Nie wierzysz mi? Odległość między ich końcami wynosi
$$|u-v| = \sqrt{(10-2)^2+(4+7)^2+(1-8)^2} = \sqrt{234}$$
i mamy
$$|u|^2+|v|^2 = \sqrt{117}^2+\sqrt{117}^2 = \sqrt{234}^2 = |u-v|^2,$$
więc kąt między u i v jest prosty z twierdzenia Pitagorasa.

– Chyba z twierdzenia odwrotnego do…

– Cicho siedź! Pedant się znalazł. Poza tym łatwo sprawdzić, że Twoje pytanie sprowadza się do obliczenia *iloczynu skalarnego*
$$\langle u,v\rangle = u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3 = 10\cdot 2+4\cdot(-7)+1\cdot 8 = 0.$$
Skoro wyszło 0, to kąt jest prosty. Uczyłem się o tym na matematyce. Więc podsumujmy: punkty $0, u, v$ i $u+v=(12,-3,9)$ wyznaczają kwadrat o boku $\sqrt{117}$. Zgadza się?

– Na razie dobrze.

– To będzie podstawa naszego sześcianu. Teraz wystarczy znaleźć trzeci wektor w, prostopadły do obu u i v. Ugh… to chyba potrwa. Przynieś coś do picia.

– Czekaj, o tym to ja się uczyłem na fizyce. To się nazywa *iloczyn wektorowy* $u\times v$. Podstawia się dwa wektory i wychodzi wektor prostopadły do nich obu, czyli w Twojej notacji $\langle u\times v,u\rangle = \langle u\times v,v\rangle = 0$. Chcesz wzór?

– Dawaj!

– Mam go tu w zeszycie. Uwaga: $u\times v=(u_2v_3-u_3v_2, u_3v_1-u_1v_3, u_1v_2-u_2v_1)$.

– Trochę długi, ale to nic, podstawiamy: $u\times v=(39,-78,-78)$. To już, bierzemy wektory u, v i $u\times v$ i rozpinamy na nich sześcian! A nie mówiłem!

– Za bardzo się rozpędziłeś. Ten Twój „sześcian” to tylko prostopadłościan. Trzeci wektor ma długość $\sqrt{39^2+(-78)^2+(-78)^2} = \sqrt{13689} = 117$, a nie $\sqrt{117}$. Zapomniałem Ci powiedzieć: długość wektora $u\times v$ jest równa polu równoległoboku rozpiętego przez u i v.

– Czyli w naszym przypadku polu kwadratu: $\sqrt{117}\cdot\sqrt{117} = 117$. To by się nawet zgadzało. Ehhh… Ale zaraz, nie wystarczy przeskalować ten wektor? Kierunek jest przecież dobry, tylko długość się nie zgadza!

– Bingo! Mamy wektor o długości 117, a chcieliśmy $\sqrt{117}$, czyli trzeba każdą współrzędną podzielić przez $\sqrt{117}$! No nie… to niedobrze. Wychodzi $(\sqrt{13}, -2\sqrt{13}, -2\sqrt{13})$. To nie jest punkt o współrzędnych całkowitych.

– Widzę właśnie. No trudno. Pierwsze koty za płoty. Weźmiemy jakieś inne u i v. A jak znowu się nie uda, to zmienimy ten $\sqrt{117}$ na $\sqrt{13}$ albo $\sqrt{257}$ i na pewno w końcu znajdziemy dobry przykład. A tak w ogóle, to czemu ja mam się męczyć? Bolek, Ty miałeś informatykę, weź to zaprogramuj i niech komputer szuka. W jakim języku wy się tam uczycie?

– W COBOLu. Ale wiesz co, to chyba nie jest najlepszy pomysł…

– Bo co? Paru prostych pętli w COBOLu nie umiesz napisać? Nie bądź cienias!

– Nie no, umiem. Ale to chyba nic nie da, bo ja już widzę jak to się skończy.

– To weź mnie oświeć…

– Powiedzmy, że będziemy chcieli zrobić taką konstrukcję, biorąc za krawędź $\sqrt{13}$ albo $\sqrt{257}$, albo w ogóle $\sqrt{n}$ dla jakiegoś naturalnego n. Wybierzemy dwa prostopadłe wektory u i v długości $\sqrt{n}$ i całkowitych współrzędnych tak jak Ty…

Rozwiązanie zadania F 939.
Siła oporu F_{op}, z jaką powietrze działa na ciało poruszające się z prędkością v wynosi
$$F_{\text{op}} = \frac{1}{2} C \rho S v^2,$$
gdzie ρ jest gęstością powietrza, S polem powierzchni przekroju ciała (prostopadłego do kierunku ruchu), a C współczynnikiem zależnym od kształtu ciała o wartości rzędu 1 (od 0,1 do 1). W dobrym przybliżeniu powietrze spełnia równanie stanu gazu doskonałego. Korzystając z tego równania dla danych zadania, otrzymujemy (dla temperatury w skali Kelvina $T = 293\,\text{K}$):
$$\rho = \frac{p\mu}{RT} \approx 1{,}2\,\text{kg/m}^3.$$
Przyjmijmy, że szerokość ciała skoczka wynosi średnio 30 cm – w ramionach na pewno więcej, ale za to dla nóg mniej, co dla wzrostu 1,8 m daje $S \approx 0{,}54\,\text{m}^2$. Maksymalna prędkość odpowiada sytuacji, gdy siła oporu $F_{\text{op}} = mg$. Po podstawieniu powyższych oszacowań do równania otrzymujemy
$$v = \sqrt{\frac{2mg}{C\rho S}} \approx 50\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 180\,\frac{\text{km}}{\text{h}}.$$
Podczas zawodów, przy skokach z wysokości około 2000 m po około 12 s skoczkowie osiągają stałe prędkości około 190 km/h bliskie otrzymanej w rozwiązaniu.

Rozwiązanie zadania F 940.
Podczas narastania indukcji pola magnetycznego w pierścieniu pojawia się siła elektromotoryczna $\mathcal{E}$. Zgodnie z prawem indukcji Faradaya mamy
$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt},$$
gdzie Φ oznacza strumień indukcji przez powierzchnię cewki. Oznacza to, że w każdym punkcie pierścienia, stycznie do niego, na ładunki działa pole elektryczne o wartości $E = \mathcal{E}/(2\pi r)$, gdzie r jest promieniem pierścienia. Liniowa gęstość ładunku na pierścieniu wynosi $\rho = Q/(2\pi r)$, a więc na odcinek dl pierścienia działa siła $dF = \rho E\, dl$ i moment siły względem jego środka to $dM = r\,dF = r\rho E\, dl$. Całkowity moment siły „obracający” pierścień wynosi $M = 2\pi r^2 \rho E$. Ten moment siły nadaje pierścieniowi przyspieszenie kątowe $d\omega/dt = M/I$, gdzie $I = mr^2$ jest momentem bezwładności pierścienia. Otrzymujemy więc
$$\frac{d\omega}{dt} = -2\pi r^2 \frac{Q}{2\pi r} \frac{1}{2\pi r^3 m} \frac{d\Phi}{dt} = -2\pi r^2 \frac{Q}{2\pi r} \frac{1}{2\pi r^3 m} \frac{\pi r^2 dB}{dt}.$$
Ostatnia równość wynika z definicji strumienia jednorodnego pola B przez pole koła. Po uproszczeniu powtarzających się czynników dostajemy:
$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{Q}{2m} \frac{dB}{dt}$$
i ze względu na początkowe wartości $\omega = 0$ oraz $B = 0$, ostatecznie otrzymujemy $\omega = QB_0/(2m)$.

– Wybierzemy albo i nie. Skąd wiesz, że zawsze się da?

– Nieważne, jak się nie da, to i tak nici z konstrukcji, więc powiedzmy, że się udało. Teraz obliczasz wektor $u \times v$ i tak jak poprzednio, on ma współrzędne całkowite i długość $\sqrt{n} \cdot \sqrt{n} = n$. Czyli jest za długi, bo miało być $\sqrt{n}$. Więc musimy go skrócić $\sqrt{n}$ razy, bo tylko tam może być trzeci wierzchołek sześcianu…

– Nie tylko tam, jeszcze po przeciwnej stronie!

– Teraz to Ty jesteś pedantem. Znak nic nie zmieni, bo tak czy inaczej wektor $(u \times v)/\sqrt{n}$ nie ma współrzędnych całkowitych, tylko niewymierne, bo wszędzie się kręci ten nieszczęsny $\sqrt{n}$!

– Chyba że…

– Że co?

– …że $\sqrt{n}$ jest całkowity. Na przykład $\sqrt{25}$ albo $\sqrt{36}$!

– Czyli już! No bo tak jakby pokazaliśmy, że nie da się skonstruować kontrprzykładu. A to chyba to samo, co udowodnić twierdzenie?

– Tak myślę. Weź, zapiszmy to jakoś zgrabnie i możemy opublikować na tym forum.

– Nie ma sensu, tam już jest jedno rozwiązanie.

– Tam już jest… Co? Bolek, Ty mnie zapędzasz w kozi róg, a tam już czeka gotowe rozwiązanie?! Czekaj, jak ja cię dorwę…

– Lolek, czekaj, ała! To nie tak! Bo ja tego rozwiązania z forum tak do końca nie rozumiem! Ono jest jakieś magiczne. Twoje jest dużo lepsze.

– Dobra, przeczytajmy razem, co oni tam piszą. *Objętość sześcianu o krawędzi $\sqrt{n}$ wynosi $V = \sqrt{n}^3$.* Na razie chyba wszystko jasne?

– Tak, tak. Ale patrz dalej: *Ponieważ wszystkie wierzchołki mają współrzędne całkowite, więc objętość V jest liczbą całkowitą.* Tego do końca nie rozumiem. Dalej już jest łatwo: *Z równości $V^2 = n^3$ wynika, że n jest kwadratem liczby całkowitej, czyli krawędź $\sqrt{n}$ jest całkowita.*

– Faktycznie magia. To jak to jest z tą objętością? Jest jakiś oczywisty powód, że sześcian o wierzchołkach w punktach kratowych musi mieć całkowitą objętość?

– Trochę o tym myślałem i wydaje mi się, że to może być prawda nawet dla dowolnego równoległościanu. Bo, na przykład, na płaszczyźnie wszystko działa: wzór na pole równoległoboku rozpiętego przez wektory $u = (u_1, u_2)$ i $v = (v_1, v_2)$ to $|u_1 v_2 - u_2 v_1|$, więc dla współrzędnych całkowitych wynik jest liczbą całkowitą. W przestrzeni też powinien być podobny wzór na objętość. Prawda?

– Wiesz co, Bolek?

– No co?

– Myślałem, że Ciebie nie ruszają takie *moralne* argumenty.

1. Zapisz zgrabnie rozwiązanie Bolka i Lolka.
2. Czy Bolek mógłby wybrać takie $\sqrt{n}$, żeby Lolek potknął się już przy próbie znalezienia wektora u?
3. Czy Bolek mógłby wybrać takie $\sqrt{n}$, żeby Lolek nie mógł dobrać do u żadnego wektora v?
4. Znajdź wzór na objętość równoległościanu rozpiętego przez trzy wektory. Podpowiedź: wyznacznik. Korzystając z niego, uzasadnij ostatnią obserwację Bolka.
5. Czy rozwiązanie Bolka i Lolka i rozwiązanie znalezione na forum są istotnie różne, czy może to tylko dwa wcielenia tego samego pomysłu?

Małą Deltę przygotował Michał ADAMASZEK