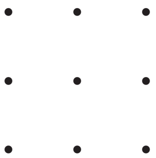
Krzywe i połamane

Joanna JASZUŃSKA

Oto kilka zadań związanych z istnieniem i własnościami pewnych krzywych lub łamanych na płaszczyźnie i w przestrzeni trójwymiarowej.

1. Mamy dwa ziemniaki. Wykaż, że istnieje taka krzywa zamknięta w przestrzeni trójwymiarowej, którą da się narysować na powierzchni każdego z tych ziemniaków.

2. Danych jest 9 punktów rozmieszczonych w wierzchołkach, środkach boków i środku kwadratu 2×2, jak na rysunku 1. Połącz wszystkie te punkty za pomocą łamanej złożonej z czterech odcinków.



Rys. 1

3. Czy istnieje w przestrzeni taka łamana zwyczajna zamknięta, której żaden z rzutów na płaszczyzny w ustalonych trzech wzajemnie prostopadłych kierunkach nie zawiera łamanej zamkniętej?

4. Pewnego poranka o godzinie 8^{00} turysta wyruszył z domu u podnóża góry i o 20^{00} dotarł do schroniska na szczycie. O 8^{00} następnego dnia wyruszył ze szczytu tą samą trasą i o 20^{00} wrócił do domu. Udowodnij, że istnieje taki punkt, w którym turysta był w oba dni dokładnie o tej samej godzinie.

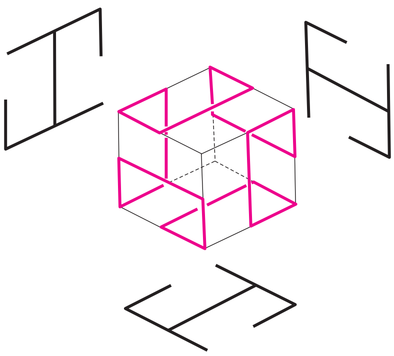
5. W przestrzeni dana jest łamana zwyczajna zamknięta złożona z sześciu równej długości odcinków, przy czym odcinki pierwszy i czwarty, drugi i piąty oraz trzeci i szósty są parami równoległe. Ponadto każde dwie proste zawierające kolejne odcinki łamanej tworzą kąty płaskie równe $120°$. Czy łamana ta musi być sześciokątem foremnym?

6. Robaczek wgryzł się w idealnie kuliste jabłko o średnicy 1, wydrążył w nim cieniutki tunelik o długości 0,9 i o sobie tylko znanym kształcie i wyszedł na powierzchnię w innym punkcie. Wykaż, że można to jabłko tak przeciąć na pół, by w jednej z połówek nie było śladów bytności robaczka.

Rozwiązania

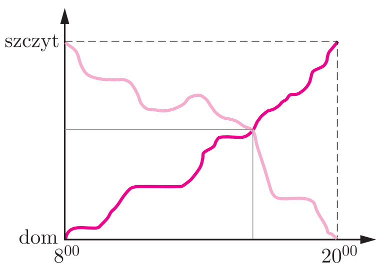
R1. Zamiast ziemniaków rozważmy ich duchy o dokładnie tym samym kształcie i rozmiarze. Wystarczy teraz, by jeden duch częściowo przeniknął przez drugiego. Przecięcie ich powierzchni wyznacza szukaną krzywą. ☐

R2. Startując ze środka lewego boku rysujemy w górę odcinek o długości 2 (wystaje on więc poza kwadrat); następnie w prawo w dół odcinek przechodzący przez środki górnego i prawego boku i kończący się na poziomie dołu kwadratu; potem w lewo poziomy odcinek o długości 3, kończący się w lewym dolnym rogu kwadratu; i wreszcie czwarty odcinek łamanej – przekątną kwadratu (w prawo w górę). ☐



Rys. 2

R3. Tak, przykład takiej łamanej zaprezentowano na rysunku 2. Znajduje się ona na powierzchni pewnego sześcianu, a przedstawione jej rzuty są w kierunkach zgodnych z krawędziami tego sześcianu. ☐



Rys. 3. Turysta mógł zmieniać tempo marszu, robić postoje, a nawet się cofać.

R4. Narysujmy wykresy obu wędrówek turysty (rys. 3). Jedna z nich to krzywa łącząca dwa przeciwległe wierzchołki prostokąta, druga zaś łączy pozostałe dwa wierzchołki. Takie dwie krzywe muszą się gdzieś przeciąć, co kończy dowód. ☐

Aby nieco ściślej uzasadnić przecinanie się krzywych, można wykorzystać np. własność Darboux i zadanie 1 z *deltoidu* 12/2010. Inne rozwiązanie opisano w *deltoidzie* 11/2014.

R5. Nie musi. Rozważmy ośmiościan foremny o parach przeciwległych wierzchołków A i A', B i B', C i C'. Łamana $ABCA'B'C'A$ spełnia warunki zadania. Odpowiednie odcinki są równe, bo ośmiościan jest foremny i równoległe, bo $ABA'B'$, $ACA'C'$, $BCB'C'$ są kwadratami. Ściany tego ośmiościanu są trójkątami równobocznymi, więc wszystkie pary kolejnych prostych tworzą kąty $120°$. ☐

Elipsoida obrotowa o *ogniskach* F, G i *stałej* d to zbiór takich punktów X przestrzeni, dla których $XF + XG = d$. Punkty X, dla których $XF + XG < d$, tworzą wnętrze elipsoidy. Elipsoida jest figurą wypukłą.

R6. Rozważmy elipsoidę obrotową o ogniskach w punktach wejścia i wyjścia robaczka oraz o stałej równej 0,9. Każdy punkt tuneliku odległy jest od jego końców w sumie o najwyżej 0,9, więc cały tunelik mieści się w elipsoidzie. Z kolei środek jabłka jest poza nią, gdyż suma jego odległości od ognisk równa jest $0{,}5 + 0{,}5 = 1 > 0{,}9$. Istnieje więc taka płaszczyzna przechodząca przez środek, że cała elipsoida jest po jednej jej stronie. Wtedy po drugiej stronie otrzymujemy nietkniętą przez robaczka połówkę jabłka. ☐

Literatura:
Peter Winkler, *Mathematical Mind–Benders*, A K Peters 2007