Symetrie ciał i grupy: teoria Galois

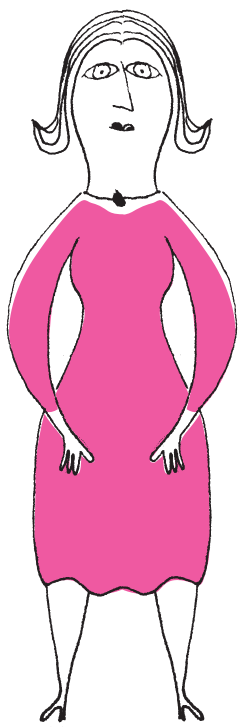
*Maria DONTEN-BURY**

*Instytut Matematyki, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Tym, którym zarys nie wystarczy, polecamy *Elementy teorii Galois* Macieja Bryńskiego.

Poniższa opowieść była na tyle ważna dla młodego, zaledwie dwudziestoletniego, matematyka Évariste'a Galois, że poświęcił ostatni dzień przed pojedynkiem, aby spisać ją w liście do przyjaciela. Niestety, nie dostał od losu szansy na kontynuowanie swoich prac, ale jakiś czas po jego śmierci matematycy zrozumieli znaczenie jego pomysłów. Ślady teorii, z której zarysem Czytelnik zapoznać się może w dalszej części artykułu, odnaleźć można w wielu gałęziach współczesnej matematyki. Jej bezpośrednim następstwem jest wiele efektownych rozwiązań problemów, których ludzkość szukała przez setki lat: nierozwiązalność (przez pierwiastniki) równań wielomianowych stopnia 5 lub wyższego, niekonstruowalność pewnych wielokątów foremnych (cyrklem i linijką), a także niewykonalność klasycznych konstrukcji geometrycznych, czyli podwojenia sześcianu, trysekcji kąta i kwadratury koła.

Pierwiastki wielomianów. Zbiór liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ jest przydatny i przyjazny użytkownikowi, ale jednak mocno wybrakowany. Zwykle dostrzegamy jego braki, patrząc na dopuszczalne rozwinięcia dziesiętne: liczby wymierne mogą mieć tylko skończone lub okresowe od pewnego miejsca rozwinięcia. Tym razem spójrzmy na ten problem z punktu widzenia wielomianów. Znajdźmy, na przykład, pierwiastki wielomianu $x^2 - 2$. Dostajemy dwie możliwości: $x = \sqrt{2}$ i $x = -\sqrt{2}$. Żadna z nich nie jest liczbą wymierną – przeczyłoby to podstawowym własnościom podzielności. Stąd wniosek, że zbiór $\mathbb{Q}$ jest za mały, żebyśmy mogli znaleźć wewnątrz niego rozwiązania dla wszystkich równań wielomianowych mających wymierne współczynniki, czyli w pewnym sensie pochodzących od tego zbioru.



Ta własność potrafi dawać jeszcze ciekawszy efekt: jeśli chcemy znaleźć pierwiastki wielomianu $x^2 + 1$, to musimy wyjść poza zbiór liczb rzeczywistych. Rozwiązaniami są jednostka urojona i oraz liczba do niej przeciwna $-i$, tak zwane *pierwiastki kwadratowe z minus jedynki*. Widzimy zatem, że pewne liczby niewymierne, a nawet nierzeczywiste, pojawiają się naturalnie w okolicach zbioru liczb wymiernych za sprawą wielomianów.

Rozszerzenia ciał. W tej sytuacji wygodnie byłoby rozważać zbiór liczb wymiernych z dodanymi $\pm\sqrt{2}$ lub $\pm i$, lub innym zestawem pierwiastków pewnego wielomianu. Tylko trzeba odpowiednio się za to zabrać – zadbać o zachowanie pewnych podstawowych własności algebraicznych. O zbiorze $\mathbb{Q}$ mówimy, że jest *ciałem*, co oznacza, że jego elementy możemy dodawać, odejmować, mnożyć i dzielić (z wyjątkiem zera, przez które nie chcemy dzielić), i w wyniku tych działań zawsze otrzymujemy elementy tego samego zbioru, liczby wymierne. Jeśli teraz chcemy rozszerzyć ciało $\mathbb{Q}$ o pewien element, to wymagamy, żeby efektem takiej operacji też było ciało. To oznacza, że będziemy rozważać zbiór otrzymany ze wszystkich możliwych wyników kombinacji czterech podstawowych działań na liczbach wymiernych i dodanym elemencie (lub elementach). Na przykład, jeśli rozszerzamy $\mathbb{Q}$ o $\sqrt{2}$ (lub o $-\sqrt{2}$), to otrzymujemy ciało oznaczane $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, które składa się ze wszystkich liczb postaci $a + b\sqrt{2}$, gdzie $a, b \in \mathbb{Q}$. Czytelnik Wnikliwy sprawdzi, że suma, różnica, iloczyn i iloraz dwóch liczb tej postaci również jest tej postaci.

Mówimy, że zbiór X jest zamknięty ze względu na pewne działanie, jeśli wynik tego działania wykonanego na elementach X jest elementem X. Na przykład zbiór $\mathbb{Q}$, jak i każde inne ciało, jest zamknięty ze względu na dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie przez niezerowe elementy. Natomiast zbiór liczb całkowitych nie jest zamknięty ze względu na dzielenie, więc nie jest ciałem.

Ogólnie, rozszerzenie $\mathbb{Q}$ o liczby $a_1, \ldots, a_k$ oznaczamy $\mathbb{Q}(a_1, \ldots, a_k)$ i definiujemy jako najmniejszy zbiór zamknięty na operacje dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia zawierający cały zbiór $\mathbb{Q}$ oraz $a_1, \ldots, a_k$. Jeśli $a_1, \ldots, a_k$ są pierwiastkami pewnych wielomianów o współczynnikach wymiernych, to będziemy je nazywać *elementami algebraicznymi nad* $\mathbb{Q}$, a rozszerzenie $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(a_1, \ldots, a_k)$ – *rozszerzeniem algebraicznym*.

Stopień rozszerzenia. Przyjrzyjmy się dokładniej rozszerzeniom $\mathbb{Q}$ o jeden element algebraiczny nad $\mathbb{Q}$, czyli ciałom postaci $\mathbb{Q}(a)$. To ograniczenie okazuje się w pełni uprawnione, ponieważ, jak mówi twierdzenie Abela, dowolne rozszerzenie algebraiczne można przedstawić jako rozszerzenie o jeden element. Znalezienie go może nie być łatwe, ale istnieją też proste przypadki.

Na przykład ciało $k_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ jest tym samym co $k_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$. Oczywiście $k_2 \subset k_1$, ponieważ $\mathbb{Q}$ i element $\sqrt{2}+\sqrt{3}$, który generuje rozszerzenie, należą do k_1. A jak sprawdzić, że $k_1 \subset k_2$? Wystarczy przedstawić $\sqrt{2}$ i $\sqrt{3}$ jako elementy k_2. Zauważmy, że $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 = 5 + 2\sqrt{6} \in k_2$. Ponieważ mamy do dyspozycji wszystkie liczby wymierne i podstawowe działania, więc możemy otrzymać $\sqrt{6}$, nie wychodząc poza k_2. Spójrzmy na wynik mnożenia $\sqrt{6}(\sqrt{2}+\sqrt{3}) = 2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}$. Odejmując od niego dwu- lub trzykrotność $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ i dzieląc przez liczbę całkowitą, dowiadujemy się, że $\sqrt{2} \in k_2$ i $\sqrt{3} \in k_2$, a zatem $k_1 \subset k_2$.

Dlaczego wolimy pracować z rozszerzeniami o jeden element? W tej sytuacji łatwiej jest opisać postać wszystkich elementów rozszerzenia algebraicznego i określić pewne jego parametry. Z definicji element a, o który rozszerzamy $\mathbb{Q}$, jest pierwiastkiem wielomianu o współczynnikach w $\mathbb{Q}$. Ale takich wielomianów może być wiele... Na przykład, i jest pierwiastkiem $x^4 - 1$ (czyli jest pierwiastkiem 4 stopnia z 1), ale ten wielomian możemy zapisać jako iloczyn $(x^2-1)(x^2+1)$, gdzie i jest pierwiastkiem drugiego czynnika. Który więc wybrać? Wystarczy powiedzieć, że bierzemy wielomian (o współczynnikach wymiernych) najniższego możliwego stopnia, którego a jest pierwiastkiem; nazwiemy go *wielomianem minimalnym* dla a. To określa go jednoznacznie z dokładnością do mnożenia przez stałą, więc wybieramy zawsze ten, który ma współczynnik przy najwyższej potędze zmiennej x równy 1.

Gdyby istniały dwa różne wielomiany minimalne dla elementu a, to biorąc ich różnicę, otrzymalibyśmy wielomian (niezerowy!) niższego stopnia, którego pierwiastkiem byłoby a. Czyli wcale nie zaczynalibyśmy od wielomianów minimalnych!

Stopniem rozszerzenia $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(a)$ będziemy nazywać po prostu stopień wielomianu minimalnego dla a. Ta liczba określa również liczbę różnych potęg a, których musimy użyć, żeby opisać wszystkie elementy ciała $\mathbb{Q}(a)$ bez dodatkowych mnożeń przez liczby inne niż wymierne. Dokładniej, jeśli $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(a)$ jest rozszerzeniem stopnia n, to wszystkie elementy $\mathbb{Q}(a)$ są postaci $p_0 + p_1 a + p_2 a^2 + \ldots + p_{n-1}a^{n-1}$, gdzie $p_0, \ldots, p_{n-1}$ są liczbami wymiernymi. Argument opiera się na spostrzeżeniu, że a^n umiemy tak przedstawić – w końcu a jest pierwiastkiem wielomianu $x^n + p_{n-1}x^{n-1} + \ldots + p_1 x + p_0$ o współczynnikach z $\mathbb{Q}$.

Można powiedzieć, że stopień rozszerzenia $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(a)$ to wymiar $\mathbb{Q}(a)$ jako przestrzeni liniowej nad $\mathbb{Q}$.

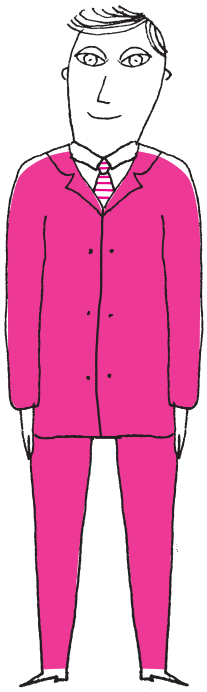
Wobec tego rozszerzenie $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ jest stopnia 2, a wielomianem minimalnym dla $\sqrt{2}$ jest $x^2 - 2$. Podobnie $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(i)$ jest rozszerzeniem stopnia 2. A czy rozszerzenie $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\zeta_3)$ o pierwiastek trzeciego stopnia z 1 (czyli pierwiastek wielomianu $x^3 - 1$) jest stopnia 3? Otóż nie – to również jest rozszerzenie stopnia 2. Wielomian $x^3 - 1$ można rozłożyć na czynniki $(x^2 + x + 1)(x - 1)$, a pierwiastkami pierwszego czynnika są ζ_3 i ζ_3^2. Zatem $x^2 + x + 1$ jest wielomianem minimalnym dla ζ_3 i dla ζ_3^2.

Jeszcze ciekawszy przykład. Czy podobnie jest z pierwiastkiem trzeciego stopnia z 2? Nie, tym razem dostajemy rozszerzenie $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ stopnia 3, a wielomian minimalny dla $\sqrt[3]{2}$ to $x^3 - 2$, którego pozostałymi pierwiastkami są $\zeta_3\sqrt[3]{2}$ i $\zeta_3^2\sqrt[3]{2}$. Zauważmy jednak, że $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ nie zawiera tych dwóch pozostałych pierwiastków – to ciało jest zawarte w ciele liczb rzeczywistych, do którego $\zeta_3\sqrt[3]{2}$ i $\zeta_3^2\sqrt[3]{2}$ nie należą. Żeby otrzymać najmniejsze ciało zawierające wszystkie pierwiastki $x^3 - 2$, tak zwane *ciało rozkładu* tego wielomianu, trzeba rozszerzyć $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ o pozostałe pierwiastki (wystarczy wziąć jeden z nich). Tak samo, jak wcześniej rozszerzaliśmy $\mathbb{Q}$ o pewne elementy algebraiczne, możemy rozszerzać dowolne inne ciało!

Czytelnik Wnikliwy sprawdzi, że jeśli element a jest pierwiastkiem wielomianu $w(x)$ o współczynnikach w $\mathbb{Q}$, to $w(x)$ jest podzielny przez wielomian minimalny dla a. Stąd można wywnioskować, że $x^3 - 2$ jest wielomianem minimalnym dla $\sqrt[3]{2}$.

Możemy też obliczyć stopień takiego rozszerzenia $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})(\zeta_3\sqrt[3]{2}) = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \zeta_3\sqrt[3]{2})$. W tym celu trzeba znaleźć wielomian minimalny dla $\zeta_3\sqrt[3]{2}$ o współczynnikach w $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$. Oczywistym kandydatem jest $x^3 - 2$; ma współczynniki z dobrego ciała, jednak okazuje się za duży. Ale jeśli podzielimy go przez $x - \sqrt[3]{2}$, to dostaniemy szukany wielomian minimalny: $x^2 + \sqrt[3]{2}x + (\sqrt[3]{2})^2$. To oznacza, że badane rozszerzenie jest stopnia 2. Możemy też popatrzeć na oba rozszerzenia razem, czyli na wieżę rozszerzeń $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \zeta_3\sqrt[3]{2})$, i, zapominając o środkowym ciele, rozważyć rozszerzenie $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \zeta_3\sqrt[3]{2})$. Ponieważ stopnie rozszerzeń w wieżach się mnożą, to rozszerzenie jest stopnia 6.

Symetrie, czyli automorfizmy. Jak zauważyliśmy wcześniej, rozszerzenie $\mathbb{Q}$ o i oraz o $-i$ są tym samym. Co więcej, położenia tych elementów w ciele $\mathbb{Q}(i)$



są w pewnym sensie symetryczne. Dokładniej, umiemy tak przekształcić ciało $\mathbb{Q}(i)$ na nie samo, żeby zamienić i z $-i$. Oczywiście, to nie może być byle jakie przekształcenie – wymagamy, żeby było bijekcją i respektowało strukturę ciała, czyli podstawowe operacje. Przekształcenie σ musi zachowywać sumę: $\sigma(a+b) = \sigma(a) + \sigma(b)$ dla dowolnych $a, b \in \mathbb{Q}(i)$, i analogicznie dla odejmowania, mnożenia i dzielenia (a stąd $\sigma(1) = 1$ i $\sigma(0) = 0$). Takie przekształcenie ciała nazywamy jego *automorfizmem*. W przypadku $\mathbb{Q}(i)$ okazuje się, że żądane własności ma sprzężenie liczb zespolonych: $\sigma(a + bi) = a - bi$. Zauważmy, że ten automorfizm trzyma w miejscu liczby wymierne: dla każdego $q \in \mathbb{Q}$ mamy $\sigma(q) = q$.

I tu pojawia się kolejna struktura algebraiczna: *grupa*. Spójrzmy na zbiór wszystkich automorfizmów wybranego ciała – możemy je składać i odwracać! Nietrudno sprawdzić, że przy obu tych operacjach będziemy dostawać przekształcenia zachowujące podstawowe działania. Mamy też automorfizm trywialny, przeprowadzający każdy element na niego samego; składanie z nim nic nie zmienia. To wszystko znaczy właśnie, że automorfizmy ciała tworzą grupę: zbiór z odwracalnym działaniem (nazywanym zwyczajowo mnożeniem).

Grupa automorfizmów ciała będącego rozszerzeniem algebraicznym $\mathbb{Q}$ nie może być zbyt duża – liczba jej elementów nie przekracza stopnia rozszerzenia. Łatwo to wykazać, jeśli umiemy opisać rozszerzenie za pomocą jednego dodawanego elementu a. Co wtedy dzieje się z wielomianem minimalnym dla a przy automorfizmie σ? Nic! Jego współczynniki pochodzą z ciała zachowywanego przez σ, więc wielomian pozostaje bez zmian. A ponieważ a jest jego pierwiastkiem, więc $\sigma(a)$ też musi być jego pierwiastkiem. Teraz wystarczy zauważyć, że wybór wartości $\sigma(a)$ określa σ jednoznacznie, mamy więc co najwyżej tyle różnych automorfizmów, ile (różnych) pierwiastków wielomianu minimalnego.

Wielomian może mieć co najwyżej tyle pierwiastków, liczonych z krotnościami, ile jest równy jego stopień. A tak naprawdę zawsze ma dokładnie tyle, jeśli tylko szukamy pierwiastków w *ciele algebraicznie domkniętym* (czyli takim, którego nie da się rozszerzyć o żaden element algebraiczny) zawierającym jego współczynniki – tak mówi *zasadnicze twierdzenie algebry*. Znanym zapewne Czytelnikowi przykładem ciała algebraicznie domkniętego są liczby zespolone.

I wreszcie twierdzenia. Galois interesował się specjalnym rodzajem automorfizmów ciał. Dla ustalonego rozszerzenia $k_1 \subset k_2$ szukał takich automorfizmów ciała k_2, które trzymają w miejscu wszystkie elementy k_1. Tak wybrane automorfizmy też tworzą grupę, nazywaną *grupą Galois rozszerzenia* i oznaczaną $G(k_2/k_1)$, zwykle trochę mniejszą niż grupa wszystkich automorfizmów k_2. Badał też przejście w drugą stronę, od grupy do rozszerzenia ciał. Dla dowolnej podgrupy $H \subset G(k_2/k_1)$, czyli mniejszej grupy zawartej w większej, można wyznaczyć zbiór wspólnych punktów stałych wszystkich automorfizmów H. Okazuje się, że to też będzie ciało k_H, leżące gdzieś pomiędzy k_1 i k_2, a więc tworzące z nimi wieżę rozszerzeń $k_1 \subset k_H \subset k_2$.

Powiemy, że rozszerzenie $k_1 \subset k_2$ jest *rozszerzeniem Galois*, jeśli wykonanie kolejno obu tych operacji powoduje powrót do punktu wyjścia, czyli jeśli elementy ciała k_2 trzymane w miejscu przez każdy automorfizm z grupy $G(k_2/k_1)$ to dokładnie elementy ciała k_1. Główny wynik Galois to obserwacja, że rozszerzenia Galois zachowują się bardzo porządnie względem opisanych dwóch operacji. Na tyle porządnie, że, w pewnym zakresie, zamiast badać duże zbiory o złożonej strukturze – ciała i ich rozszerzenia – możemy odczytywać informacje ze struktury ich grup symetrii, zwykle znacznie prostszej. A dokładnie, opisane operacje brania grupy Galois rozszerzenia i brania ciała punktów stałych grupy automorfizmów zadają wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość między ciałami k_H leżącymi w środku rozszerzenia Galois ($k_1 \subset k_H \subset k_2$) a podgrupami grupy Galois $H \subset G(k_2/k_1)$. Co więcej, ta odpowiedniość pozwala sprawdzić, kiedy rozszerzenie $k_1 \subset k_H$ jest rozszerzeniem Galois (natomiast $k_H \subset k_2$ zawsze jest Galois). Dzieje się tak wtedy, gdy podgrupa $H \subset G(k_2/k_1)$ ma dobre własności: jest tak zwaną *podgrupą normalną*, czyli niezmienniczą ze względu na pewną klasę automorfizmów $G(k_2/k_1)$, nazywanych sprzężeniami. Co ciekawe, pojęcie podgrupy normalnej pojawia się w bardzo wielu zagadnieniach algebraicznych, ale pierwszy raz zostało wyszczególnione właśnie przez Galois przy okazji powyższego twierdzenia.

Sprzężenie w grupie zadane przez element $g \in G$ to automorfizm, który elementowi h przyporządkowuje wynik mnożenia ghg^{-1}. Wobec tego $H \subset G$ jest podgrupą normalną, jeśli dla dowolnych $h \in H$ i $g \in G$ zachodzi $ghg^{-1} \in H$.

Jak to wygląda w praktyce? Wróćmy do przykładu $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \zeta_3 \sqrt[3]{2})$, czyli ciała rozkładu $x^3 - 2$. W naszej sytuacji, czyli przy założeniu, że

Jeśli rozważane ciała nie są rozszerzeniami $\mathbb{Q}$, to twierdzenia Galois pozostają prawdziwe, a do niektórych omawianych po drodze wyników potrzebne jest założenie *rozdzielczości* rozszerzenia, co oznacza, że żaden wielomian rozkładalny w większym ciele nie może mieć w nim wielokrotnych pierwiastków.

wszystkie rozważane ciała zawierają $\mathbb{Q}$, bycie ciałem rozkładu wystarcza do bycia rozszerzeniem Galois. Grupa Galois tego rozszerzenia ma 6 elementów, ponieważ dla rozszerzenia Galois liczba jej elementów musi być równa stopniowi rozszerzenia. Wiemy ponadto, że automorfizm z grupy Galois może przeprowadzać pierwiastki wielomianu o współczynnikach z $\mathbb{Q}$ tylko na inne pierwiastki tego wielomianu, czyli je permutuje. Wielomian x^3-2 ma trzy różne pierwiastki, które można spermutować na 6 sposobów. Ponadto każda permutacja wyznacza już jednoznacznie automorfizm $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \zeta_3\sqrt[3]{2})$, ponieważ mówi, jakie mają być obrazy generatorów tego rozszerzenia. Wobec tego grupa Galois $G(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \zeta_3\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q})$ to grupa wszystkich permutacji trójelementowego zbioru!

Ponadto można sprawdzić, na przykład badając własności permutacji, że jedyną (nietrywialną) normalną podgrupą jest grupa cyklicznych permutacji trzech elementów. A wewnątrz $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \zeta_3\sqrt[3]{2})$ możemy znaleźć ciało $\mathbb{Q}(i\sqrt{3})$, ponieważ

$$i\sqrt{3} = (\zeta_3\sqrt[3]{2} - \zeta_3^2\sqrt[3]{2})/\sqrt[3]{2}.$$

Okazuje się, że to dokładnie ciało punktów stałych podgrupy trójelementowych cykli, więc rozszerzenie $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(i\sqrt{3})$ jest Galois – co zgadza się z faktem, że stanowi ono ciało rozkładu x^2+3.

Jak to powiązać z klasyczną geometrią? W przypadku konstrukcji geometrycznych kluczowym spostrzeżeniem jest to, że jeśli z pewnego zbioru punktów umiemy za pomocą cyrkla i linijki otrzymać nowy punkt, to jego współrzędne należą do rozszerzenia algebraicznego stopnia 2^n ciała zawierającego współrzędne danych punktów. Działanie cyrkla i linijki można opisać algebraicznie przez układy równań stopnia co najwyżej 2, więc każdy krok konstrukcji to rozszerzenie ciała o pierwiastek równania kwadratowego (lub brak rozszerzenia, jeśli nowe współrzędne już należą do ciała generowanego przez wcześniejsze). Wobec tego, jeśli mamy dany sześcian o boku długości 1, to konstrukcja sześcianu o dwukrotnie większej objętości wymagałaby umiejętności otrzymania odcinka o długości $\sqrt[3]{2}$. Ta liczba, jak wiemy, jest stopnia 3 nad $\mathbb{Q}$, co nie pozwala jej znaleźć się w żadnym rozszerzeniu $\mathbb{Q}$ stopnia 2^n.

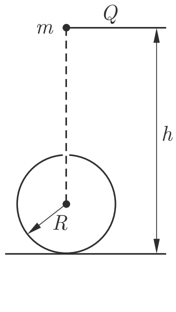
Jak widać, konsekwencje teorii Galois stanowią nawet bardziej wdzięczny temat opowieści niż jej podstawy, więc o tym w *Delcie* już było, nawet nie raz! Zainteresowanych rozwiązaniami pozostałych klasycznych problemów odsyłamy więc do artykułów Macieja Bryńskiego *O tym, co się da, a czego się nie da rozwiązać* (*Delta* 9/2013) i *Równania algebraiczne* (*Delta* 9/2016).

Zadania

Przygotował Michał NAWROCKI

F 937. Cylindryczne naczynie jest zamknięte tłokiem o masie M i polu powierzchni S. Na górnej powierzchni tłoka, bez straty energii, podskakuje N kulek, każda o masie $m \ll M$. Wysokość, na jaką podskakuje każda kulka, wynosi h, ciśnienie atmosferyczne jest równe p_0. Ile wynosi ciśnienie gazu pod tłokiem?
Rozwiązanie na str. 15

F 938. Do sferycznego, metalowego naczynia o promieniu R, mającego na górze niewielki otwór, wpadają z wysokości $h > 2R$ naładowane krople rtęci. Masa każdej kropli wynosi m, a jej ładunek elektryczny wynosi Q. Jaki będzie kolejny numer n ostatniej kropli, która jeszcze wpadnie do naczynia?
Rozwiązanie na str. 15



Redaguje Łukasz BOŻYK

M 1543. Znaleźć wszystkie nieujemne liczby całkowite n, dla których każda z liczb $9n+16$ oraz $16n+9$ jest kwadratem liczby całkowitej.
Rozwiązanie na str. 3

M 1544. Liczby rzeczywiste a, b, c są takie, że $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1$. Sprawdzić, że wartość wyrażenia

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b}$$

nie zależy od wartości a, b, c.
Rozwiązanie na str. 3

M 1545. Niech $\mathcal{S}$ będzie takim podzbiorem zbioru $\mathbb{N}$ dodatnich liczb całkowitych, że dla każdej pary $x, y \in \mathcal{S}$ również $x+y \in \mathcal{S}$. Przypuśćmy, że zbiór $\mathbb{N} \setminus \mathcal{S}$ jest skończony i $\mathbb{N} \setminus \mathcal{S} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Udowodnić, że

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leqslant n^2.$$

Rozwiązanie na str. 3