Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

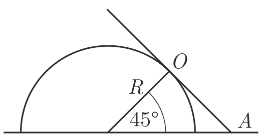
Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 XII 2017

Zadania z fizyki nr 644, 645

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA



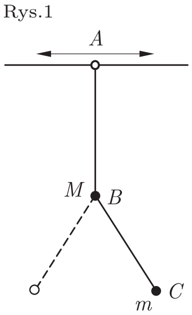
Rys.1

644. Półwalec o promieniu R umocowany jest na poziomej płaszczyźnie (rys. 1). Jednorodny cienki pręt o długości $2R$ opiera się na walcu w połowie swojej długości, a jego dolny koniec A jest unieruchomiony. Po oswobodzeniu pręt ześlizguje się z walca. Nie ma tarcia. Jaka będzie prędkość górnego końca pręta B w chwili, gdy zetknie się on z powierzchnią walca?

645. Oszacować, jaka część ciepła parowania wody zużywana jest na zwiększenie jej energii wewnętrznej przy temperaturze $T = 373$ K? Ciepło parowania wody wynosi $q = 2,3 \cdot 10^6$ J/kg.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 6/2017

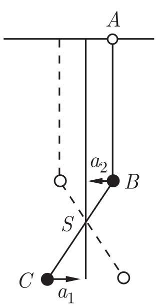
Przypominamy treść zadań:



Rys. 2

640. Do wahadła matematycznego AB (rys. 2) o masie M przyczepione jest wahadło matematyczne BC o masie m. Punkt zawieszenia A tego wahadła podwójnego drga harmonicznie wzdłuż linii poziomej z częstością ω i małą amplitudą. Znaleźć długość nici dolnego wahadła, jeżeli górna nić przez cały czas pozostaje pionowa.

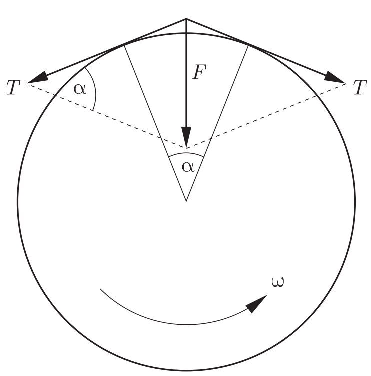
641. Gumowy kabel ma współczynnik sprężystości k, masę m i długość l. Okrąg zrobiony z tego kabla obraca się z prędkością kątową ω w płaszczyźnie poziomej wokół osi pionowej, przechodzącej przez środek okręgu. Wyznaczyć promień obracającego się pierścienia.



Rys. 3

640. Jeżeli górna nić zachowuje przez cały czas kierunek pionowy, to wszystkie siły zewnętrzne działające na układ, czyli siła ciężkości i siła naciągu górnej nici, są pionowe. Wynika stąd, że środek masy S układu nie przemieszcza się w kierunku poziomym (rys. 3), a kulki w każdej chwili poruszają się w kierunkach przeciwnych. Stosunek ich przyspieszeń w kierunku poziomym wynosi $a_2/a_1 = m/M$. Oznaczmy szukaną długość dolnej nici przez l, a odległość dolnej kulki od środka masy przez d. Z rysunku 3 widać, że $a_2/a_1 = (l-d)/d$. Z porównania wzorów na stosunki przyspieszeń otrzymujemy $d = lM/(M+m)$. Ponieważ amplituda drgań punktu A jest mała, przemieszczenia środka masy układu w kierunku pionowym również są małe i dolna kulka zachowuje się w przybliżeniu jak wahadło matematyczne o długości d zawieszone w nieruchomym punkcie S. Częstość drgań tego wahadła jest taka sama jak częstość drgań punktu A i wynosi $\omega = \sqrt{\mathrm{g}/d}$. Stąd dolna nić ma długość

$$l = \frac{\mathrm{g}(1 + m/M)}{\omega^2}.$$



Rys. 4

641. Oznaczmy promień obracającego się okręgu przez R. Rozważmy mały element tego okręgu o długości ΔL. Jego masa to $\Delta m = m\Delta L/L$, gdzie $L = 2\pi R$. Na wydzielony element na jego końcach działają dwie siły naprężenia T, skierowane stycznie do okręgu (rys. 4). Ich wypadkowa $F = 2T\sin(\alpha/2)$ nadaje rozważanemu elementowi przyspieszenie dośrodkowe $a = \omega^2 R$. Równanie ruchu tego elementu ma postać

$$2T\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\omega^2 Rm\Delta L}{L}.$$

Siła naprężenia kabla dana jest wzorem $T = k(2\pi R - l)$. Uwzględniając, że kąt α jest mały, czyli

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2} = \frac{\Delta L}{2R},$$

otrzymujemy szukany promień obracającego się okręgu:

$$R = 2\pi\frac{lk}{4\pi^2 k - m\omega^2}.$$

Zadania z matematyki nr 747, 748

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 XII 2017

747. Funkcja f, o wartościach rzeczywistych, jest określona, wypukła i różniczkowalna na zbiorze wszystkich liczb dodatnich; przy tym $|f'(n^2)| \geqslant 1/n^2$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$. Udowodnić, że funkcja f jest nieograniczona.

748. Czy można w pola tablicy o rozmiarach 8×8 wpisać liczby -1, 0, 1 (w każde pole jedną liczbę) tak, by sumy liczb w wierszach oraz sumy liczb w kolumnach utworzyły układ 16 różnych wartości? Czy odpowiedź zmieni się, gdy będziemy rozważali tablicę 14×14 (i wymagali 28 różnych wartości)?

Zadanie 748 zaproponował pan Piotr Wiśniewski z Warszawy

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 737 ($WT = 2{,}89$) i 738 ($WT = 1{,}21$) z numeru 3/2017

Adam Dzedzej	Gdańsk	43,22
Jerzy Cisło	Wrocław	41,85
Patryk Jaśniewski	Gdańsk	40,94
Marcin Małogrosz	Warszawa	40,86
Roksana Słowik	Knurów	40,36
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	39,71
Janusz Olszewski	Warszawa	39,15
Marcin Kasperski	Warszawa	37,67
Krzysztof Maziarz	Kraków	37,45

Gromadne mijanie „44” zapowiada się niebawem…

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 6/2017

Przypominamy treść zadań:

743. W zbiorze liczb rzeczywistych różnych od zera określamy działanie: $x\Diamond y = (x/y) + (y/x)$. Niech a, b, c, d będą liczbami, spełniającymi równanie

$$(a\Diamond b) + (b\Diamond c) + (c\Diamond d) + (d\Diamond a) = (a\Diamond c) + (b\Diamond d) + ((ac)\Diamond(bd)) + 2.$$

Czy a, b, c, d mogą być czterema różnymi liczbami? Czy mogą być wśród nich trzy różne liczby?

744. Dana jest liczba całkowita $k \geqslant 2$. Niech M będzie takim zbiorem dodatnich liczb całkowitych, że dla każdej pary różnych liczb $m, n \in M$ zachodzi nierówność $mn \leqslant k^2|m-n|$. Wykazać, że zbiorze M jest nie więcej niż $2k-1$ liczb. Czy dla każdej liczby $k \geqslant 2$ istnieje $(2k-1)$-elementowy zbiór M o podanej własności?

743. Niech $L(a,b,c,d)$ oznacza lewą stronę podanego równania, pomnożoną przez $abcd$, i niech $P(a,b,c,d)$ oznacza prawą stronę tego równania, pomnożoną przez $abcd$. Są to wielomiany czterech zmiennych, jednorodne, czwartego stopnia. Skontrolujmy ich wartości, gdy np. $c = d$:

$$L(a,b,c,c) = \left(\frac{a^2+b^2}{ab} + \frac{b^2+c^2}{bc} + 2 + \frac{a^2+c^2}{ac}\right)abc^2 =$$
$$= (a^2+b^2)c^2 + (b^2+c^2)ac + 2abc^2 + (a^2+c^2)bc;$$
$$P(a,b,c,c) = \left(\frac{a^2+c^2}{ac} + \frac{b^2+c^2}{bc} + \frac{a^2c^2+b^2c^2}{abc^2} + 2\right)abc^2 =$$
$$= (a^2+c^2)bc + (b^2+c^2)ac + (a^2c^2+b^2c^2) + 2abc^2;$$

te wartości są równe. To znaczy, że wielomian $F = P - L$ dzieli się przez dwumian $(c-d)$. Analogicznie (wobec niezmienniczości przy cyklicznym przesunięciu zmiennych) dzieli się przez dwumiany $(d-a)$, $(a-b)$, $(b-c)$. Stąd wniosek, że dzieli się przez iloczyn tych dwumianów, a iloraz jest pewną stałą. Biorąc dowolne różne liczby a, b, c, d, stwierdzamy, że ta stała to 1. Tak więc

$$F(a,b,c,d) = (a-b)(b-c)(c-d)(d-a)$$

(oczywiście można było tę tożsamość sprawdzić wprost, podstawiając wyrażenie określające rozważane działanie, przenosząc wszystko na jedną stronę i pracowicie przekształcając).

Dane w zadaniu równanie $F(a,b,c,d) = 0$ nie jest spełnione dla żadnej czwórki różnych liczb a, b, c, d, jest zaś spełnione dla wielu czwórek utworzonych z trzech różnych liczb (z jednym powtórzeniem).

744. Podany warunek przepisujemy równoważnie jako $|m^{-1} - n^{-1}| \geqslant k^{-2}$. Niech K będzie zbiorem odwrotności wszystkich liczb za zbioru M. Dowolne dwa elementy zbioru K są więc oddalone o co najmniej $1/k^2$. Zatem w każdym spośród k przedziałów

$$\left(0, \frac{1}{k^2}\right], \quad \left(\frac{1}{k^2}, \frac{2}{k^2}\right], \quad \left(\frac{2}{k^2}, \frac{3}{k^2}\right], \quad \ldots, \quad \left(\frac{k-1}{k^2}, \frac{k}{k^2}\right]$$

może być co najwyżej jeden element zbioru K. Pozostałe liczby dodatnie tworzą przedział $(1/k, \infty)$, w którym są jedynie odwrotności liczb naturalnych $1, 2, \ldots, k-1$. To pokazuje, że zbiór K (więc i zbiór M) może liczyć co najwyżej $2k-1$ elementów.

Odpowiedź na drugie pytanie z zadania jest przecząca: na przykład dla $k = 9$ nie istnieje 17-elementowy zbiór M o podanej własności. Jak w przypadku ogólnym, zauważamy, że w każdym z przedziałów $\left(0, \frac{1}{81}\right]$, $\left(\frac{1}{81}, \frac{2}{81}\right]$, $\left(\frac{2}{81}, \frac{3}{81}\right]$ może być tylko jeden element zbioru K. Dalej, odwrotności liczb naturalnych, leżące w przedziale $\left(\frac{1}{27}, \frac{1}{9}\right]$, rozbijamy na pięć podzbiorów:

$$\left\{\tfrac{1}{26}, \ldots, \tfrac{1}{20}\right\}, \ \left\{\tfrac{1}{19}, \ldots, \tfrac{1}{16}\right\}, \ \left\{\tfrac{1}{15}, \tfrac{1}{14}, \tfrac{1}{13}\right\}, \ \left\{\tfrac{1}{12}, \tfrac{1}{11}\right\}, \ \left\{\tfrac{1}{10}, \tfrac{1}{9}\right\}$$

– każdy z nich ma średnicę mniejszą niż $\frac{1}{81}$, więc zawiera co najwyżej jeden element zbioru K. No i zostają jeszcze ułamki $\frac{1}{8}, \frac{1}{7}, \ldots, \frac{1}{2}, 1$. Liczność zbioru K (więc i M) nie przekracza $3 + 5 + 8$, czyli 16.