sem.edu.pl

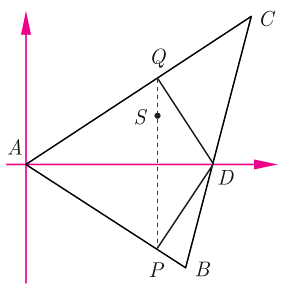
LXVIII OM

W LXVIII Olimpiadzie Matematycznej uczestniczyło 1495 uczniów, zatem o 324 osoby więcej niż rok wcześniej, do zawodów stopnia drugiego zakwalifikowano 632 uczniów, a do zawodów stopnia trzeciego – 154 uczniów. Zapewne wynika to z pojawienia się w pierwszym stopniu sporej liczby zadań stosunkowo łatwych, a już na pewno niewymagających szczególnego przygotowania. Dotyczy to również zadania 4 z pierwszego stopnia, którego rozwiązania nadesłały 1152 osoby, w tym 707 poprawne – zadania, które rozwiązać można, po prostu stosując popularne w szkołach metody pozbywania się wartości bezwzględnych. To czasochłonne, ale w zadaniu domowym wykonalne. Najtrudniejszym zadaniem spośród rozwiązywanych w domu okazało się zadanie 11 (geometria płaska) – rozwiązało je 388 uczniów. Najłatwiejsze było zadanie 2 rozwiązane przez 1441 startujących.

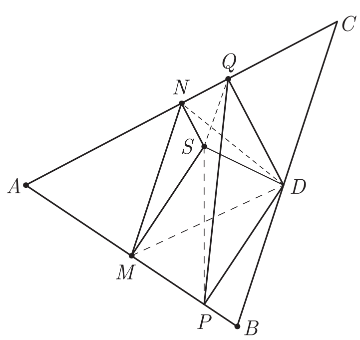
Zawody okręgowe były znacznie trudniejsze niż rok wcześniej. Najtrudniejsze było zadanie 6 (klasyczna teoria liczb). Zaskoczyły mnie wyniki zadania drugiego (rozwiązanie poniżej) rozwiązanego przez 60 osób, poniżej 10% startujących – spodziewałem się znacznie większej liczby poprawnych rozwiązań. Do finału dopuściliśmy tych uczniów, którzy uzyskali co najmniej 10 punktów, co w zasadzie oznaczało rozwiązanie dwóch zadań. Finał też nie był łatwy. Zadania trzeciego nie rozwiązał nikt, choć oczekiwaliśmy kilku rozwiązań. Trudne też było zadanie ostatnie, któremu radę dały trzy osoby, a zadaniu piątemu – osób 9. Prawie wszyscy ci, którzy rozwiązali zadanie 5, korzystali z pojęć związanych z geometrią rzutową, co w tym przypadku było spodziewane.

Ustalając składy reprezentacji Polski na Olimpiadę Międzynarodową i inne zawody, korzystaliśmy z wyników zawodów okręgowych, bo sam finał nie rozróżniał laureatów, którzy uzyskali 18 punktów. Szesnastu finalistów (około 10,5%) nie rozwiązało żadnego zadania, w drugim stopniu 124 osoby otrzymały 0 za wszystkie zadania.

Dodać wypada, że wielu uczniów źle zrozumiało zadanie piąte. Powinienem był pomyśleć, że zawodnicy mogą treść (jednoznaczną dla zawodowego matematyka) zinterpretować opacznie, co się, niestety, stało, choć czołowi zawodnicy tej OM zrozumieli ją właściwie. Trudno mi powstrzymać się od komentarza na temat geometrii.



Oto dowód (gimnazjalisty!) bez założenia, że AD jest dwusieczną.
$MA = MB = \frac{1}{2}AB$, $NA = NC = \frac{1}{2}AC$, S to środek okręgu opisanego na ABC. $SM \parallel DP$, $SN \parallel DQ$, więc $[MSP] = [MSD]$ i $[QNS] = [NSD]$. Stąd $[AQSP] = [AMN] + [MDN] =$
$= [AMN] + [MCN] = [ACM] = \frac{1}{2}[ABC]$.



Jeśli S leży na PQ, to $[APQ] = [APSQ] = \frac{1}{2}[ABC]$, zatem $[BCPQ] = \frac{1}{2}[ABC]$, czyli $[APQ] = [BCPQ]$,
jeśli S leży wewnątrz ΔAPQ, to $[APQ] > \frac{1}{2}[ABC]$,
jeśli S leży na zewnątrz ΔAPQ, to $[APQ] < \frac{1}{2}[ABC]$.

Uczestnicy OM radzą sobie z nią, gdy da się coś zauważyć i otrzymać krótkie rozwiązanie, często pomysłowe. Zdarza się jednak, że do głowy nic nie przychodzi, a czas goni. Próbują wtedy rozwiązania analitycznego; na ogół bez powodzenia. Tym razem było inaczej.

Spójrzmy na zadanie drugie z zawodów II stopnia ubiegłej OM.
W trójkącie ostrokątnym ABC dwusieczna kąta BAC przecina bok BC w punkcie D. Punkty P i Q są rzutami prostokątnymi punktu D odpowiednio na proste AB i AC. Dowieść, że pole trójkąta APQ jest równe polu czworokąta $BCQP$ wtedy i tylko wtedy, gdy środek okręgu opisanego na trójkącie ABC leży na prostej PQ.

Rozwiążemy je analitycznie, prawie bezmyślnie. Należy sensownie wybrać układ współrzędnych. Niech osią OX będzie prosta AD i niech $A = (0,0)$. Niech $k > 0$ będzie współczynnikiem kierunkowym prostej AC. Prostą AB opisuje wtedy równanie $y = -kx$. Niech $B = (b, -kb)$, $C = (c, kc)$, gdzie $b, c > 0$. Równaniem prostej BC jest: $k(c+b)x + (b-c)y = 2kbc$. Jeśli $y = 0$, to $x = \frac{2bc}{c+b}$, więc $D = \left(\frac{2bc}{c+b}, 0\right)$.

Prosta prostopadła do AC, przechodząca przez punkt D, ma równanie $x + ky = \frac{2bc}{c+b}$.

Gdy $y = kx$, to $x = \frac{2bc}{(c+b)(1+k^2)}$, więc $Q = \left(\frac{2bc}{(c+b)(1+k^2)}, \frac{2bck}{(c+b)(1+k^2)}\right) = \frac{2b}{(c+b)(1+k^2)}C$.

Podobnie $P = \left(\frac{2bc}{(c+b)(1+k^2)}, \frac{-2bck}{(c+b)(1+k^2)}\right) = \frac{2c}{(c+b)(1+k^2)}B$. Równaniem prostej PQ jest więc $x = \frac{2bc}{(c+b)(1+k^2)}$.

Środek S okręgu opisanego na trójkącie ABC to punkt wspólny symetralnych odcinków AB i AC, więc prostych o równaniach $x - ky = \frac{b}{2}(1+k^2)$ i $x + ky = \frac{c}{2}(1+k^2)$. Dodając te równania stronami i dzieląc wynik przez 2, otrzymujemy $x = \frac{(c+b)(1+k^2)}{4}$. Punkt S leży na prostej PQ wtedy i tylko wtedy, gdy

$\frac{2bc}{(c+b)(1+k^2)} = \frac{(c+b)(1+k^2)}{4}$, czyli $(c+b)^2(1+k^2)^2 = 8bc$.

Pole trójkąta PQA jest połową pola trójkąta BCA wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{2c}{(c+b)(1+k^2)} \cdot \frac{2b}{(c+b)(1+k^2)} = \frac{1}{2}$, więc $(c+b)^2(1+k^2)^2 = 8bc$, co kończy dowód.

Dodajmy, że teza jest prawdziwa bez założenia, że odcinek AD jest dwusieczną kąta BAC. Wystarczy, by punkt D leżał na odcinku BC, co kilkunastu uczestników OM udowodniło w czasie zawodów i od nich tego się dowiedziałem w czasie omówienia zadań po zawodach (patrz margines). Jak zwykle wśród uczestników olimpiady są tacy, którzy widzą więcej niż układający zadania.

Michał KRYCH