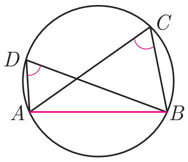
Łuki Talesa

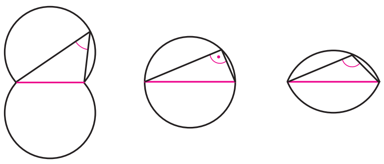
Joanna JASZUŃSKA

Odcinek AB *widać z punktu* C *pod kątem* α, gdy $\sphericalangle ACB = \alpha$. Z twierdzenia o kątach wpisanych wynika, że jeśli punkty C i D leżą na okręgu po tej samej stronie jego cięciwy AB, to widać ją z C i D pod tym samym kątem (rys. 1).



Rys. 1

Dla danego odcinka AB i kąta $\alpha \in (0°, 180°)$ zbiór punktów płaszczyzny, z których widać AB pod kątem α to dwa przystające łuki okręgów jak na rysunku 2, zwane *łukami Talesa*. Ponadto z punktów na zewnątrz łuków odcinek AB widać pod kątem mniejszym od α, a z punktów wewnątrz – pod większym.



Rys. 2. $\alpha < 90°$, $\alpha = 90°$, $\alpha > 90°$

1. Rozstrzygnij, czy istnieje takich 100 punktów na płaszczyźnie, z których każde trzy są wierzchołkami trójkąta rozwartokątnego.

2. Podziel kwadrat na 8 trójkątów ostrokątnych.

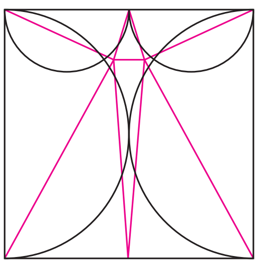
3. Punkt H jest ortocentrum trójkąta ostrokątnego ABC. Wykaż, że okręgi opisane na trójkątach ABH i ACH są przystające.

4. W czworościanie $ABCD$ krawędź AB jest prostopadła do krawędzi CD i $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB$. Rozstrzygnij, czy oznacza to, że płaszczyzna wyznaczona przez krawędź AB i środek krawędzi CD jest prostopadła do krawędzi CD.

Rozwiązania

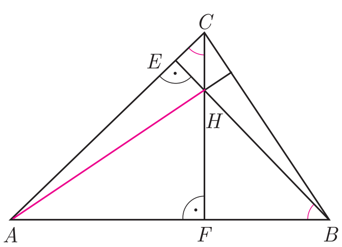
R1. Wybierzmy 100 punktów na półokręgu bez końców. Wówczas dla dowolnej trójki z nich odcinek utworzony przez dwa skrajne widać ze środkowego pod kątem rozwartym (wpisanym w okrąg i opartym na łuku dłuższym od półokręgu). ☐

R2. Rozwiązanie przedstawia rysunek 3. Pozostawiam Czytelnikowi sprawdzenie, że wszystkie trójkąty istotnie są ostrokątne. Pomocny bywa fakt, że ich wierzchołki są na zewnątrz odpowiednich półokręgów (czyli łuków Talesa dla kąta 90°). ☐



Rys. 3. Na mniej niż 8 się nie da – dowód znaleźć można w *Delcie* 1/2002.

R3. Niech E, F będą spodkami wysokości odpowiednio z B i C (rys. 4). Trójkąty prostokątne ABE i ACF są podobne, bo mają wspólny kąt przy wierzchołku A. Stąd z punktów B i C widać odcinek AH pod tym samym kątem, leżą więc one na przystających łukach okręgów opisanych na trójkątach ABH i ACH. ☐

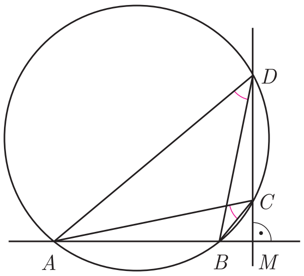


Rys. 4. Inne rozwiązanie opisano w *deltoidzie* 9/2012. Teza zachodzi także dla trójkąta rozwartokątnego.

R4. Jeśli postulowana w zadaniu prostopadłość ma miejsce, to punkty C i D, a więc też trójkąty ABC i ABD, są symetryczne względem opisanej płaszczyzny, zatem przystające. Wykażemy, że tak być nie musi.

Niech punkty A, B, C, D leżą na jednym okręgu w tej właśnie kolejności, przy czym $AB \perp CD$, a M to punkt przecięcia tych prostych (rys. 5). Wówczas trójkąty ABC, ABD nie są przystające (mają różne wysokości na AB, więc też różne pola). Jednocześnie $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB$.

Jeśli teraz obrócimy trójkąt ABD wokół prostej AB o pewien dodatni kąt mniejszy od 180°, otrzymamy czworościan $ABCD$, w którym $CM \perp AB \perp DM$. Wobec tego prosta AB jest prostopadła do płaszczyzny CDM, a więc także do każdej prostej zawartej w tej płaszczyźnie. Stąd $AB \perp CD$ także po opisanym obrocie. Uzyskaliśmy więc czworościan $ABCD$ spełniający warunki zadania, w którym trójkąty ABC i ABD nie są przystające. ☐



Rys. 5

Zadania domowe

5. Skonstruuj trójkąt ABC, mając dane punkty A, B, kąt przy wierzchołku C oraz długość środkowej CM. Ile rozwiązań może mieć to zadanie?

Wskazówka. Zadanie może mieć nieskończenie wiele rozwiązań.

6. Punkty A i B należą do wnętrza kąta ostrego α. Skonstruuj taki trójkąt równoramienny, aby punkty A i B należały do różnych jego ramion, aby podstawa tego trójkąta była zawarta w jednym z ramion kąta α, a wierzchołek należał do drugiego z ramion.

Wskazówka. Odbij punkt A symetrycznie w jednym z ramion kąta, otrzymując A', narysuj łuk Talesa dla odcinka $A'B$ i kąta $180° - 2\alpha$ i rozważ odpowiedni jego punkt przecięcia z wybranym wcześniej ramieniem kąta.

7. Udowodnij stwierdzenia z drugiego akapitu niniejszego artykułu.

Polecam też zadanie 7 z *deltoidu* 7/2016.

Zadanie 4 jest modyfikacją zadania z XXV Olimpiady Matematycznej. Więcej o nim m.in. w *Delcie* 5/1986.