Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`

$\otimes\sqrt{\oint!} = 44$

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 XI 2017

Zadania z matematyki nr 745, 746

Redaguje Marcin E. KUCZMA

745. Na obwodzie trójkąta ABC leżą cztery różne punkty K, L, P, Q: punkty K, L na boku AB, punkty P i Q odpowiednio na bokach BC i CA; przy tym odcinki AP, BQ, CK i CL mają jednakową długość. Udowodnić, że środki tych czterech odcinków leżą na jednym okręgu.

746. Dana jest liczba naturalna $k \geqslant 2$. Czy istnieje rosnący ciąg liczb naturalnych (a_n), którego żaden wyraz ani żadna suma skończenie wielu jego wyrazów nie jest k-tą potęgą liczby naturalnej, a przy tym ciąg $\left(\sqrt[n]{a_n}\right)$ jest ograniczony?

Zadanie 746 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 735 ($WT = 2{,}82$) i 736 ($WT = 2{,}08$) z numeru 2/2017

Patryk Jaśniewski	Gdańsk	40,94
Marcin Małogrosz	Warszawa	40,86
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	39,71
Roksana Słowik	Knurów	39,15
Adam Dzedzej	Gdańsk	39,12
Jerzy Cisło	Wrocław	37,87
Krzysztof Maziarz	Kraków	37,45
Marcin Kasperski	Warszawa	36,46
Janusz Olszewski	Warszawa	35,05

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 5/2017

Przypominamy treść zadań:

741. Niech W będzie wielościanem wypukłym, środkowo-symetrycznym, i niech π będzie ustaloną płaszczyzną, przechodzącą przez środek symetrii. Przekrój wielościanu W płaszczyzną π jest zawarty w kole o promieniu r. Udowodnić, że przekrój wielościanu W każdą płaszczyzną, równoległą do π, jest zawarty w pewnym kole o promieniu r – lub podać przykład, pokazujący nieprawdziwość takiego stwierdzenia.

742. Niech p będzie liczbą pierwszą postaci $p = 4k+1$. Dowieść, że istnieje liczba całkowita dodatnia s, mniejsza od p, dla której różnica $sp - \lfloor\sqrt{sp}\,\rfloor^2$ jest kwadratem liczby całkowitej dodatniej.

741. Banalny kontrprzykład: sześcian (o krawędzi a). Weźmy jego dwa przeciwległe wierzchołki A, B (końce przekątnej długości $a\sqrt{3}$). Płaszczyzna $\pi \perp AB$, przechodząca przez środek O, tworzy w przecięciu z sześcianem sześciokąt foremny, którego wierzchołkami są środki niektórych krawędzi sześcianu, leżące w odległości $r = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$ od środka O.

Przekrój sześcianu płaszczyzną $\pi' \| \pi$, przechodzącą przez trzy wierzchołki (połączone krawędziami np. z punktem A) jest trójkątem foremnym o boku $a\sqrt{2}$. Najmniejsze koło, zawierające ów trójkąt, ma promień $R = \frac{1}{3}a\sqrt{6} > r$.

742. Liczba pierwsza $p = 4k+1$ jest sumą dwóch kwadratów (jedno z dobrze znanych twierdzeń Fermata): $p = a^2 + b^2$; liczby całkowite $a, b > 0$ muszą być względnie pierwsze. Istnieją wobec tego liczby całkowite x, y, dla których $ax + by = 1$, przy czym $|x| < b$, $|y| < a$ (łatwe uzasadnienie przez algorytm Euklidesa).

Wykażemy, że liczba $s = x^2 + y^2$ ma własności, o które chodzi w zadaniu. Mamy bowiem oszacowanie $s < a^2 + b^2 = p$ oraz równość

$$sp = (a^2+b^2)(x^2+y^2) = (ax+by)^2 + (ay-bx)^2 = \\ = 1 + (ay-bx)^2.$$

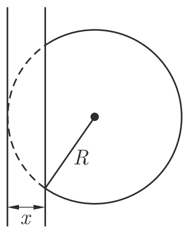
Widać z niej, że $\sqrt{sp} = |ay - bx|$. W konsekwencji $sp - \lfloor\sqrt{sp}\,\rfloor^2 = 1$; jest to niewątpliwie kwadrat liczby całkowitej dodatniej.

Uwaga. Zapewne innymi metodami także można uzyskać tezę zadania, niekoniecznie wzmocnioną do orzeczenia „ …jest kwadratem jedynki”. Pan Tomasz Ordowski, który zadanie zaproponował, zwrócił uwagę na ciąg o wyrazach

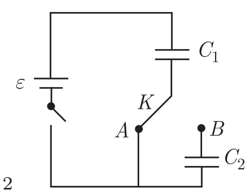
$$a(n) = \min\{s \in \mathbb{Z}: \ s > 0, \\ \exists m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} : \ sn - \lfloor\sqrt{sn}\,\rfloor^2 = m^2\},$$

obecny w OEIS (`oeis.org/A245474`). Nie jest trudno wykazać, że dla liczb pierwszych postaci $p = 4k+3$ zachodzi równość $a(p) = p$; natomiast dla liczb pierwszych $p = 4k+1$ zachodzi nierówność $a(p) < p$, i to była treść naszego zadania; autorem podanego dowodu jest Robert Israel. (Dla liczb złożonych ciąg zachowuje się dość kapryśnie).

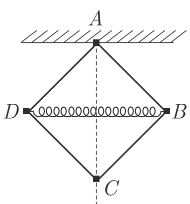
Termin nadsyłania rozwiązań: 30 XI 2017



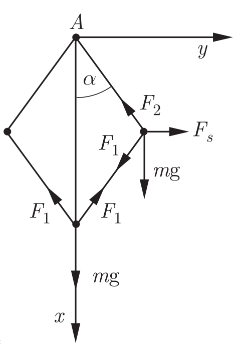
Rys. 1



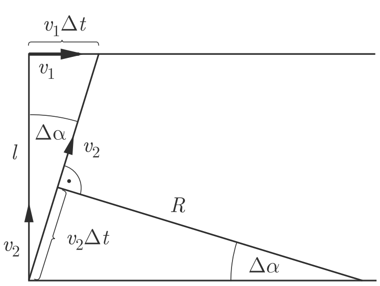
Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 634 ($WT = 1{,}15$), 635 ($WT = 3{,}25$) z numeru 3/2017

Jan Zambrzycki	Białystok	38,38
Marian Łupieżowiec	Gliwice	38,33
Tomasz Rudny	Gliwice	37,68
Jacek Konieczny	Poznań	29,80
Ryszard Woźniak	Kraków	28,77

Zadania z fizyki nr 642, 643

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

642. Piłka o promieniu R słabo uderza w ścianę i deformuje się, jak pokazano na rysunku 1. Deformacja x jest dużo mniejsza od promienia piłki i możemy przyjąć, że ciśnienie powietrza w piłce nie zmienia się podczas uderzenia. Zaniedbując sprężystość powłoki, oszacować czas zderzenia piłki ze ścianą. Masa piłki wynosi m, ciśnienie powietrza w piłce p, ciśnienie atmosferyczne p_0.

643. Układ składający się z dwóch kondensatorów o tej samej pojemności ($C_1 = C_2$) i klucza K łączymy ze źródłem napięcia o sile elektromotorycznej ε (rys. 2). Wielokrotnie zmieniamy położenie klucza K, łącząc kondensator C_1 kolejno ze stykami A i B. Jak zmienia się napięcie na kondensatorze C_2 po każdym przełączeniu klucza? Rozważyć przypadki:
a) w chwili dołączenia źródła napięcia klucz znajdował się w położeniu A;
b) w chwili dołączenia źródła napięcia klucz znajdował się w położeniu B.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 5/2017

Przypominamy treść zadań:

638. Układ składa się z czterech jednakowych, lekkich prętów o długości l i lekkiej sprężyny o długości $2l$ (rys. 3). Pręty połączone są przegubowo za pomocą małych kulek o jednakowych masach. Układ zamocowany jest w punkcie A i znajduje się w polu ciężkości. W stanie równowagi pręty tworzą kwadrat. Znaleźć częstość małych drgań układu, przy których punkt C porusza się po linii pionowej.

639. Lis biegnie po linii prostej ze stałą prędkością v_1. Lisa goni pies, którego prędkość ma stałą wartość v_2 i skierowana jest cały czas na lisa. W chwili, gdy prędkości v_1 i v_2 są do siebie prostopadłe, odległość między lisem a psem wynosi l. Jakie jest w tym momencie przyspieszenie psa?

638. Rozważmy ruch układu w położeniu opisanym kątem α (rys. 4). Równania ruchu punktów B i C mają postać:

$$ma_{Cx} = mg - 2F_1\cos\alpha,$$
$$ma_{Bx} = mg + F_1\cos\alpha - F_2\cos\alpha,$$
$$ma_{By} = F_s - F_1\sin\alpha - F_2\sin\alpha,$$

gdzie m jest masą przegubu, a_{Cx}, a_{Bx}, a_{By} są przyspieszeniami punktów B i C, $F_s = 2kl(1-\sin\alpha)$ jest siłą sprężystości. Eliminując z tych równań siły reakcji F_1 i F_2, otrzymujemy

(1) $$m(a_{Cx} + a_{Bx} - a_{By}\cos\alpha/\sin\alpha) = 2mg - (F_s\cos\alpha/\sin\alpha).$$

Współrzędne położeń punktów B i C spełniają związki

$$x_C = 2l\cos\alpha,\ \ x_B = l\cos\alpha,\ \ y_B = l\sin\alpha.$$

Stąd $a_{Bx} = a_{Cx}/2$. Dotychczasowe równania są słuszne dla dowolnego kąta α, ograniczymy teraz nasze rozważania do małych wychyleń z położenia równowagi, gdy $\alpha = \alpha_0 + \Delta\alpha$, $\Delta\alpha \ll \alpha_0$, $\alpha_0 = \pi/4$. Wtedy $\Delta y_B = l\cos\alpha\Delta\alpha \approx l\cos\alpha_0\Delta\alpha$, $\Delta x_C \approx -2l\sin\alpha_0\Delta\alpha$, $a_{By} \approx -a_{Cx}/2$. W rozważanym przybliżeniu lewa strona równania (1) ma postać $L = 2ma_{Cx}$. W stanie równowagi $a_{Cx} = 0$, stąd

(2) $$2mg = F_s(\alpha_0)\cos\alpha_0/\sin\alpha_0 = 2kl(1-\sqrt{2}/2).$$

Prawa strona równania (1) ma postać

$$P = 2kl(\cos\alpha_0/\sin\alpha_0 - \cos\alpha/\sin\alpha) - 2kl(\cos\alpha_0 - \cos\alpha) = 2kl\Delta\alpha/\sin^2\alpha_0 - k\Delta x_C.$$

Uwzględniając, że $\Delta\alpha = -\Delta x_C/(2l\sin\alpha_0)$, otrzymujemy równanie ruchu punktu C dla małych wychyleń z położenia równowagi:

$$a_{Cx} + \Delta x_C(1/\sin^3\alpha_0 - 1)k/2m = 0,$$

gdzie zgodnie z (2) $k/m = 2\mathrm{g}/(l(2-\sqrt{2}))$. Szukana częstość drgań wynosi

$$\omega = \sqrt{\mathrm{g}(2\sqrt{2}-1)/(l(2-\sqrt{2}))}.$$

639. Ponieważ prędkość psa ma stałą wartość, jego przyspieszenie jest prostopadłe do wektora prędkości i ma wartość $a = v_2^2/R$, gdzie R jest promieniem krzywizny toru w danym miejscu. W bardzo krótkim czasie Δt wektor prędkości psa obraca się o kąt α dany wzorem $\alpha = v_2\Delta t/R$ (rys. 5). W tym samym czasie lis przebywa drogę $v_1\Delta t = \alpha l$, gdyż wektor prędkości psa skierowany jest cały czas na lisa. Stąd $R = v_2 l/v_1$. Szukana wartość przyspieszenia wynosi $a = v_1 v_2/l$.