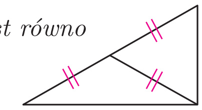
Środek przeciwprostokątnej

Joanna JASZUŃSKA

Fakt ($\star$). *W trójkącie prostokątnym środek przeciwprostokątnej jest równo odległy od wierzchołków. Również na odwrót, jeśli środek okręgu opisanego leży na boku trójkąta, to trójkąt ten jest prostokątny.*



Powyższy prosty fakt okazuje się bardzo przydatny w wielu zadaniach.

1. Dwa okręgi, styczne zewnętrznie w punkcie C, są styczne do prostej k w punktach A i B. Wykaż, że trójkąt ABC jest prostokątny.

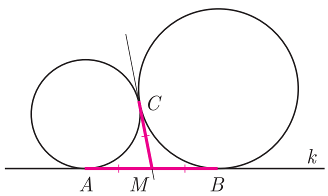
2. Wykaż, że jeżeli przekątne pewnego trapezu są prostopadłe, to suma długości podstaw tego trapezu jest nie większa od sumy długości jego ramion.

3. Wewnątrz kwadratu $ABCD$ wybrano taki punkt P, że $AP = AB$ oraz $\sphericalangle CPD = 90°$. Wykaż, że $DP = 2 \cdot CP$.

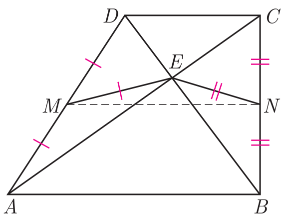
4. W trójkącie ABC środkowe poprowadzone z wierzchołków B i C są prostopadłe oraz AD jest wysokością. Wykaż, że $AD \leqslant \frac{3}{2}BC$.

5. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków AC i AB odpowiednio w punktach E i F. Punkt O jest środkiem tego okręgu, a punkt T jest symetryczny do punktu F względem punktu A. Wykaż, że proste ET i AO są równoległe.

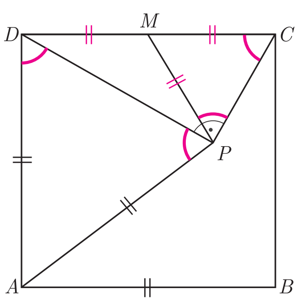
6. Proste PA i PB są styczne do okręgu Γ odpowiednio w punktach A i B. Punkt F jest rzutem prostokątnym punktu B na średnicę AE okręgu Γ. Wykaż, że środek odcinka BF leży na prostej EP.



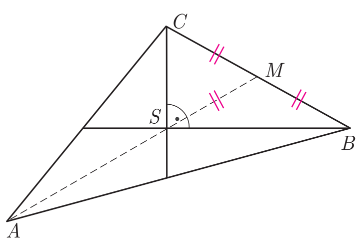
Rys. 1



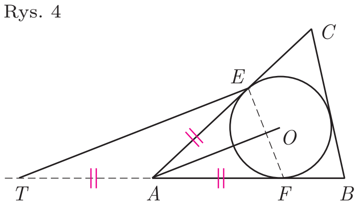
Rys. 2



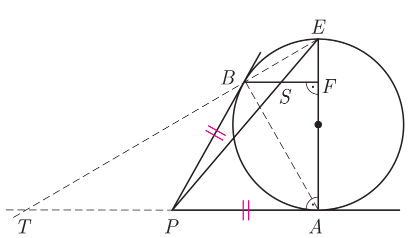
Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5



Rys. 6

Rozwiązania

R1. Niech M będzie punktem przecięcia prostej k z prostą styczną do obu okręgów, przechodzącą przez C (rys. 1). Wówczas $MA = MC = MB$ jako odcinki stycznych. Teza wynika z faktu ($\star$). $\square$

R2. Oznaczmy odpowiednio przez M i N środki ramion AD i BC trapezu, a przez E punkt przecięcia jego przekątnych (rys. 2). Wówczas na mocy nierówności trójkąta $MN \leqslant ME + NE = \frac{1}{2}(AD + BC)$, przy czym ostatnia równość wynika z faktu ($\star$). Jednocześnie w trapezie $MN = \frac{1}{2}(AB + CD)$, co kończy dowód. $\square$

R3. Trójkąt DAP jest równoramienny, gdyż $AP = AB = AD$ (rys. 3). Ponadto $\sphericalangle ADP = 90° - \sphericalangle CDP = \sphericalangle DCP$. Niech M będzie środkiem boku CD trójkąta prostokątnego CDP. Wówczas trójkąt CMP jest równoramienny i na mocy powyższej równości kątów podobny do trójkąta DAP. Stąd $DP/CP = DA/CM = DC/CM = 2$, co kończy dowód. $\square$

R4. Niech M będzie środkiem boku BC, a S — środkiem ciężkości trójkąta ABC (rys. 4). Wówczas $AD \leqslant AM = 3SM = 3 \cdot \frac{1}{2}BC$. $\square$

R5. Trójkąt EAF jest równoramienny, gdyż $AE = AF$ jako odcinki stycznych do okręgu (rys. 5). Jego podstawa EF jest zatem prostopadła do dwusiecznej AO kąta EAF. Jednocześnie $AT = AF = AE$, więc z faktu ($\star$) wynika, że proste EF i ET również są prostopadłe, co kończy dowód. $\square$

R6. Oznaczmy przez S punkt przecięcia prostych EP i BF, a przez T — punkt przecięcia prostych EB i AP (rys. 6). Obydwie proste BF i AP są prostopadłe do EA, więc trójkąty EBF oraz ETA są podobne i $BS/SF = TP/PA$. Wobec powyższego wystarczy dowieść, że P jest środkiem odcinka TA.

Kąt ABE jest prosty (gdyż EA jest średnicą okręgu), stąd także kąt ABT jest prosty. Odcinki PA i PB są równe jako styczne do okręgu. Wobec tego punkt P leży na przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego ABT i zarazem na symetralnej jednej z przyprostokątnych, jest więc środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie, czyli także środkiem boku TA, co kończy dowód. $\square$

Zadanie domowe

7. W czworościanie $ABCD$ zachodzą równości: $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB = 90°$, $AB = 10$, $CD = 6$. Wykaż, że odległość między prostymi AB i CD nie przekracza 4.

Zadania 2 i 3 pochodzą odpowiednio z XII i XI gimnazjalnej Olimpiady Matematycznej. Polecam też artykuł w olimpijskiej gazetce *Kwadrat* nr 19.