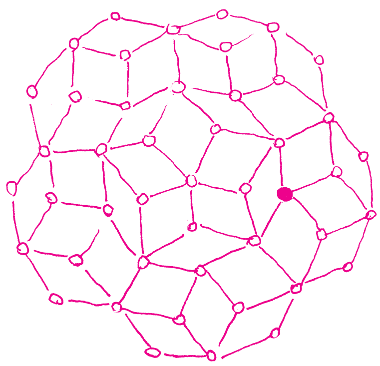
Porządek w stochastycznym świecie

*Jacek MIĘKISZ**

*Zakład Biomatematyki i Teorii Gier, IMSM, WMIM, Uniwersytet Warszawski

Rozważymy dwie uporządkowane struktury, które są wynikiem optymalizacji pewnych deterministycznych wielkości: minimalizacji energii w stanach podstawowych oddziałujących cząstek oraz maksymalizacji wypłat w równowagach Nasha rywalizujących graczy. Zadajemy pytanie – czy porządek obecny w powyższych strukturach przetrwa stochastyczne zaburzenia zawsze obecne w rzeczywistych układach?



Przykład 1. Kwazikryształy

Wyobraźmy sobie regularną sieć kwadratową, w każdym węźle której znajduje się cząstka jednego z kilku typów. Każdej przestrzennej konfiguracji cząstek przypisana jest energia będąca sumą oddziaływań pomiędzy sąsiednimi cząstkami. Skonstruowano przykłady, dla których minimalizacja powyższego funkcjonału, zwanego Hamiltonianem, prowadzi do struktur nieokresowych, na przykład odpowiadających nieokresowym parkietażom Penrose'a. Są to matematyczne modele kwazikryształów. Konfiguracje z minimalną energią nazywane są stanami podstawowymi. Nieokresowe stany podstawowe nie wykazują symetrii występujących w kryształach. Nie są jednak nieuporządkowane; ich długozasięgowy porządek skutkuje występowaniem dyskretnego widma dyfrakcyjnego. Fundamentalnym problemem jest skonstruowanie modelu oddziałujących cząstek, którego nieokresowy stan podstawowy jest stabilny ze względu na ruchy termiczne cząstek. Stan równowagowy w niezerowej temperaturze jest wynikiem rywalizacji energii i entropii, to jest minimalizacji tak zwanej energii swobodnej.

Problem Otwarty 1 – Rozstrzygnąć istnienie nieokresowych miar Gibbsa.

Skonstruować układ oddziałujących cząstek, dla którego minimalizacja energii swobodnej osiągana jest przez stany równowagowe, tak zwane miary Gibbsa na przestrzeni konfiguracji, które w odpowiednio niskich temperaturach przypisują prawdopodobieństwo bliskie jedności nieokresowym stanom podstawowym.

Przykład 2. Dylemat Więźnia

W grach ewolucyjnych zamiast cząstek oddziałują ludzie zwani agentami lub graczami, mający do dyspozycji różne strategie. Każdy z nich maksymalizuje wypłaty zależne od swojej strategii i strategii oponentów. Optimum jest osiągane w tak zwanych równowagach Nasha. Nie istnieje jednak funkcja na konfiguracjach graczy, która jest zawsze maksymalizowana w równowadze Nasha. Odróżnia to w sposób istotny równowagi Nasha od stanów podstawowych.

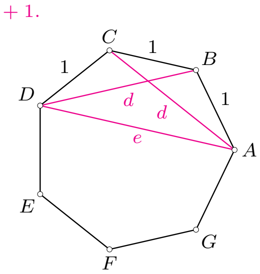
Rozważmy grę Dylemat Więźnia, gdzie obopólna kooperacja przynosi większe korzyści niż obopólna zdrada, ale największą wypłatę dostajemy, zdradzając osobę kooperującą. Pokusa powoduje, że lądujemy w jedynej równowadze Nasha, gdzie wszyscy zdradzają. Tym razem chcemy, aby losowe fluktuacje doprowadziły nas do kooperacji.

Umieśćmy graczy w wierzchołkach grafu losowego Barabasi–Alberty. Graf taki tworzymy indukcyjnie, dodając do istniejących już wierzchołków następny wierzchołek, łącząc go krawędzią z jednym z istniejących już wierzchołków z prawdopodobieństwem proporcjonalnym do jego stopnia. Wypłata gracza jest sumą wypłat z gier z sąsiadami; dodatkowo zakładamy, że każdy z graczy ponosi koszt utrzymania krawędzi łączących go z sąsiadami. Jedną z prostszych dynamik ewolucyjnych jest imitacja – w każdym dyskretnym momencie losowo wybrany gracz imituje z dużym prawdopodobieństwem strategię sąsiada, którego wypłata była największa w poprzedniej rundzie, a z małym prawdopodobieństwem popełnia błąd. Pokazaliśmy ostatnio, że istnieje krytyczny koszt, poniżej którego wszyscy kooperują, a powyżej którego liczba kooperantów maleje skokowo do około 20%. Ta gwałtowna zmiana w zachowaniu się populacji graczy jest podobna do przejścia fazowego krystalicznego lodu w ciekłą wodę.

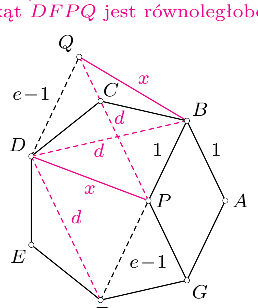
Problem Otwarty 2 – Wyjaśnić przyczyny i naturę przejścia fazowego w grze Dylemat Więźnia na grafie Barabasi–Alberty z kosztami krawędzi.

Zapraszam wszystkich zainteresowanych do współpracy w rozwiązywaniu dwóch powyższych problemów.

Rozwiązanie zadania M 1537.
Oznaczmy długość odcinka PD przez x, a krótszej i dłuższej przekątnej danego siedmiokąta foremnego odpowiednio przez d i e. Wówczas na mocy twierdzenia Ptolemeusza, zastosowanego do trapezu równoramiennego $ABCD$, uzyskujemy $d^2 = e + 1$.



Niech Q będzie takim punktem, że czworokąt $DFPQ$ jest równoległobokiem.



Wówczas $PQ = DF = BD$, więc trapez $BPDQ$ jest równoramienny. Stosując do niego twierdzenie Ptolemeusza, otrzymujemy

$$d^2 = x^2 + e - 1,$$

gdyż $BP = 1$ oraz $DQ = FP = e - 1$.

Łącząc uzyskane równości, mamy

$$x^2 + e - 1 = e + 1,$$

skąd $x = \sqrt{2}$.