Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 733 ($WT = 1{,}48$) i 734 ($WT = 2{,}11$) z numeru 1/2017

Patryk Jaśniewski	Gdańsk	40,94
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	39,43
Roksana Słowik	Knurów	39,15
Adam Dzedzej	Gdańsk	39,12
Marcin Małogrosz	Warszawa	38,78
Krzysztof Maziarz	Kraków	35,37
Jerzy Cisło	Wrocław	34,72
Marcin Kasperski	Warszawa	34,38
Janusz Olszewski	Warszawa	30,15

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 4/2017

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Przypominamy treść zadań:

739. Znaleźć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o następujących własnościach:

- $|f(x) - f(y)| \leqslant |x-y|$ dla $x, y \in \mathbb{R}$;
- dla każdej liczby $a \in \mathbb{R}$ ciąg (x_n) określony wzorami $x_0 = a$, $x_n = f(x_{n-1})$ (dla $n = 1,2,3,\ldots$) jest ciągiem arytmetycznym.

740. Obliczyć kres dolny wartości sumy
$$\frac{x}{y^2+z^2} + \frac{y}{z^2+x^2} + \frac{z}{x^2+y^2},$$
gdy x, y, z mogą być dowolnymi liczbami dodatnimi, spełniającymi warunek $x+y+z=1$.

739. Niech f będzie funkcją, spełniającą postawione warunki, i przyjmijmy, że funkcja $g(x) = f(x) - x$ nie jest stała. Istnieją więc liczby $a, b \in \mathbb{R}$ dla których $c = g(a) > d = g(b)$. W drugim z warunków, podanych w zadaniu, przyjmujemy $a = x_0$ i tworzymy ciąg arytmetyczny $(x_0, x_1, x_2, \ldots) = (a, f(a), ff(a), \ldots)$. Skoro $f(a) = a + c$, zatem $x_n = a + nc$ (dla wszystkich n). Jednocześnie $f(x_n) = x_{n+1} = a + (n+1)c$, czyli

(1) $\quad f(a+nc) = a + (n+1)c \quad$ dla $\quad n = 0,1,2,\ldots$.

Analogicznie

(2) $\quad f(b+nd) = b + (n+1)d \quad$ dla $\quad n = 0,1,2,\ldots$.

W myśl pierwszego z podanych warunków,
$$|f(a+nc) - f(b+nd)| \leqslant |(a+nc) - (b+nd)| = \\ = |a - b + n(c-d)|.$$

Po lewej stronie wstawiamy wyrażenia (1), (2) i dostajemy nierówności

(3) $\quad |a - b + (n+1)(c-d)| \leqslant |a - b + n(c-d)| \quad$ dla $\quad n = 0,1,2,\ldots$.

Dla dużych n wyrażenia ujęte w symbol wartości bezwzględnej mają wartość dodatnią (bo $c - d > 0$). Można więc opuścić moduły. Ale zależność (3) – po skasowaniu modułów – redukuje się do postaci $c - d \leqslant 0$; sprzeczność.

W konsekwencji funkcja $f(x) - x$ musi być stała. Jasne, że każda funkcja postaci $f(x) = x + C$ spełnia wymagane warunki.

740. Ustalmy liczby $x, y, z > 0$ o sumie równej 1. Funkcja $t \mapsto 1/t$ jest wypukła w przedziale $(0, \infty)$. Stosujemy do niej nierówność Jensena dla trójki punktów $1/(y^2+z^2)$, $1/(z^2+x^2)$, $1/(x^2+y^2)$ z wagami x, y, z:
$$\left(\frac{x}{y^2+z^2} + \frac{y}{z^2+x^2} + \frac{z}{x^2+y^2}\right)^{-1} \\ \leqslant x(y^2+z^2) + y(z^2+x^2) + z(x^2+y^2) = \\ = xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x) = \\ = xy(1-z) + yz(1-x) + zx(1-y) = \\ = xy + yz + zx - 3xyz.$$

Można przyjąć, że $x \geqslant y$ oraz $x \geqslant z$. Wówczas $x \geqslant 1/3$ oraz
$$xy + yz + zx - 3xyz = x(y+z) + yz(1-3x) \leqslant \\ \leqslant x(y+z) = x(1-x) \leqslant \frac{1}{4}.$$

W ostatnim szacowaniu pierwsza nierówność staje się równością tylko dla $x = 1/3$, zaś druga – tylko dla $x = 1/2$. Stąd wniosek, że
$$\frac{x}{y^2+z^2} + \frac{y}{z^2+x^2} + \frac{z}{x^2+y^2} > 4 \qquad \text{dla} \quad x, y, z > 0.$$

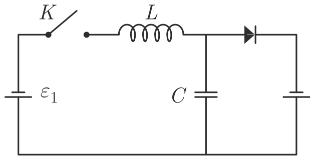
Gdyby dopuścić trójki liczb x, y, z, wśród których jedna jest zerem, rozważana suma nadal miałaby sens oraz przyjęłaby wartość 4 dla $x = y = 1/2$, $z = 0$. Przy założeniu, że $x, y, z > 0$, wartość 4 jest (jak widać) nieosiągalna; ale jest granicą badanej sumy np. dla $x = y = (1-z)/2$, gdy $z \to 0$. Jest więc jej kresem dolnym.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 4/2016

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

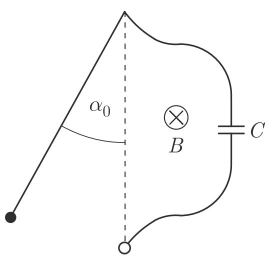
Przypominamy treść zadań:

636. W obwodzie przedstawionym na rysunku 1 mamy $\varepsilon_0 > \varepsilon_1$. Jaki ładunek przepłynie przez źródło o sile elektromotorycznej ε_0 po zamknięciu klucza K? Zakładamy, że opór omowy cewki i opory wewnętrzne źródeł są równe zeru. Dioda jest idealna, czyli jej opór w kierunku przewodzenia wynosi zero, a w kierunku przeciwnym jest nieskończenie wielki. Przed zamknięciem klucza kondensator był nienaładowany.



Rys. 1

637. Mała metalowa kulka o masie m, zawieszona na nieważkiej przewodzącej nici o długości l, wykonuje małe drgania z amplitudą kątową α_0 w płaszczyźnie pionowej, w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji B (rys. 2). Linie pola magnetycznego są prostopadłe do płaszczyzny drgań wahadła. Gdy wahadło przechodzi przez położenie równowagi, podłączony zostaje do niego za pomocą cienkich, wiotkich przewodów kondensator o pojemności C. Czas kontaktu jest bardzo krótki i można przyjąć, że w tym czasie kondensator zostaje całkowicie naładowany. Znaleźć nową amplitudę kątową drgań wahadła.

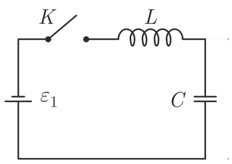


Rys. 2

636. Rozważmy najpierw obwód przedstawiony na rysunku 3. Po zamknięciu klucza w chwili $t = 0$ natężenie prądu płynącego przez cewkę i ładunek na kondensatorze są równe zeru. Spełnione są równania

$$\varepsilon_1 - L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} - \frac{Q}{C} = 0 \quad \text{oraz} \quad \frac{\mathrm{d}^2I}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 I = 0,$$

gdzie $\omega = 1/\sqrt{LC}$. W obwodzie zachodzą drgania harmoniczne. Natężenie prądu płynącego przez cewkę osiąga maksymalną wartość, gdy znika jego pochodna po czasie, napięcie na kondensatorze równe jest wtedy sile elektromotorycznej źródła ε_1. Kondensator ładuje się dalej kosztem energii pola magnetycznego w cewce. Gdy natężenie prądu $I = \mathrm{d}Q/\mathrm{d}t$ spada do zera, ładunek na kondensatorze osiąga maksymalną wartość $Q_{\max}$. Zgodnie z zasadą zachowania energii mamy $\varepsilon_1 Q_{\max} = Q_{\max}^2/(2C)$, czyli maksymalne napięcie na kondensatorze wynosi $2\varepsilon_1$.



Rys. 3

W obwodzie przedstawionym na rysunku 1 dioda zaczyna przewodzić prąd, gdy napięcie na kondensatorze jest większe niż ε_0. Gdy $\varepsilon_0 \geqslant 2\varepsilon_1$, przez źródło o sile elektromotorycznej ε_0 nie przepłynie żaden ładunek.

Niech $\varepsilon_1 < \varepsilon_0 < 2\varepsilon_1$. Gdy napięcie na kondensatorze osiąga wartość ε_0, prąd płynie przez diodę kosztem energii pola magnetycznego w cewce zgodnie z równaniem $\varepsilon_1 - \varepsilon_0 = L\mathrm{d}I/\mathrm{d}t$, czyli natężenie prądu maleje liniowo w czasie. Do chwili, gdy jego wartość spadnie do zera, napięcie na kondensatorze nie zmienia się. Oznaczmy przez q szukany ładunek przepływający przez źródło o sile elektromotorycznej ε_0. Od chwili zamknięcia klucza do chwili, kiedy przez diodę przestaje płynąć prąd, przez źródło ε_1 przepływa ładunek $\varepsilon_0 C + q$. Bilans energetyczny dla całego procesu ma postać $\varepsilon_1(\varepsilon_0 C + q) = C\varepsilon_0^2/2 + q\varepsilon_0$. Stąd

$$q = \frac{C\varepsilon_0(2\varepsilon_1 - \varepsilon_0)}{2(\varepsilon_0 - \varepsilon_1)}.$$

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 630 ($WT = 2{,}85$), 631 ($WT = 3{,}5$) 632 ($WT = 2{,}45$), 633 ($WT = 3{,}55$) z numerów 1/2017 i 2/2017

Tomasz Wietecha	Tarnów	44+2,6 (12)
Michał Koźlik	Poznań	44+2,22 (4)
Marian Łupieżowiec	Gliwice	38,33
Tomasz Rudny	Gliwice	37,68
Jan Zambrzycki	Białystok	37,23
Jacek Konieczny	Poznań	29,8
Ryszard Woźniak	Kraków	28,77

637. Kondensator ładuje się podczas kontaktu z kulką, bo między końcami przewodzącej nici poruszającej się w polu magnetycznym powstaje różnica potencjałów. Zgodnie z prawem Faradaya, gdy wahadło przechodzi przez położenie równowagi, napięcie między końcami nici wynosi

$$U = \frac{1}{2}Bl^2\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \frac{\omega_0 B l^2}{2}, \tag{1}$$

gdzie ω_0 jest prędkością kątową wahadła w najniższym położeniu. Otrzymujemy ją z zasady zachowania energii, stosując przybliżenie małych kątów

$$\frac{m\omega_0^2 l^2}{2} = mgl(1 - \cos\alpha_0) \approx \frac{mgl\alpha_0^2}{2}. \tag{2}$$

Podczas ładowania kondensatora część energii kinetycznej wahadła zamienia się na energię pola elektrycznego w kondensatorze oraz wydziela się w postaci ciepła Q:

$$\frac{m\omega_0^2 l^2}{2} - \frac{m\omega_1^2 l^2}{2} = \frac{CU^2}{2} + Q. \tag{3}$$

Prędkość kątowa wahadła maleje do wartości ω_1. Czas kontaktu kulki z kondensatorem jest bardzo krótki, możemy więc przyjąć, że napięcie U nie zmienia się podczas ładowania kondensatora. Źródło tego napięcia wykonuje zatem pracę qU, gdzie $q = CU$ jest ładunkiem, do jakiego naładował się kondensator. Stąd

$$\frac{CU^2}{2} + Q = CU^2 = \frac{C\omega_0^2 l^4 B^2}{4}. \tag{4}$$

Nową amplitudę kątową α_1 wahadła znajdujemy z równania $mgl\alpha_1^2/2 = m\omega_1^2 l^2/2$. Uwzględniając (2), (3) i (4), dostajemy

$$\alpha_1 = \alpha_0\sqrt{1 - \frac{Cl^2B^2}{2m}}.$$