każdego $i \in \{1, \ldots, m\}$ zachodzi warunek $b_i \neq 0$, gdyż żadna z hiperpłaszczyzn nie przechodzi przez punkt $(0, \ldots, 0)$. Załóżmy dla dowodu nie wprost, że $m < n$ i zdefiniujmy wielomian

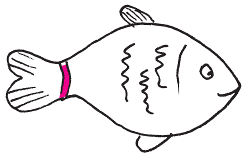
$$P(x) = (-1)^{n+m+1} \prod_{j=1}^{m} b_j \prod_{i=1}^{n} (x_i - 1) + \prod_{i=1}^{m} \big(\langle a_i, x \rangle - b_i \big).$$

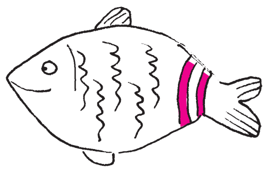
Wielomian P ma stopień n i współczynnik przy $x_1 \cdots x_n$ równy

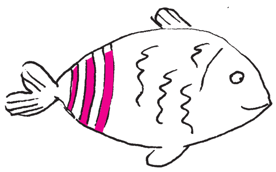
$$(-1)^{n+m+1} \prod_{j=1}^{m} b_j,$$

zatem różny od 0. Na podstawie *Combinatorial Nullstellensatz* dla $m_1 = \ldots = m_n = 1$ oraz $S_1 = \ldots = S_n = \{0, 1\}$, istnieje taki punkt $c \in \{0, 1\}^n$, że $P(c) \neq 0$. Punkt c jest różny od $(0, \ldots, 0)$, gdyż wielomian P przyjmuje wartość 0 dla $x = (0, \ldots, 0)$, a zatem punkt c należy do zadanego zbioru i nie należy do żadnej z hiperpłaszczyzn. Otrzymaliśmy sprzeczność, wobec tego $m \geqslant n$. Teraz wystarczy wskazać n hiperpłaszczyzn spełniających warunki zadania; są one zadane równaniami $x_1 = 1, \ldots, x_n = 1$. $\square$

Mam nadzieję, że powyższe przykłady przekonały Cię, Drogi Czytelniku, o użyteczności *Combinatorial Nullstellensatz* w rozwiązywaniu problemów z pozoru z nim niezwiązanych. Na zakończenie chciałbym zauważyć, że to wspaniałe twierdzenie jest słuszne dla wielomianów o współczynnikach z dowolnego ciała. Dotychczas używaliśmy jedynie ciała liczb rzeczywistych. Drugim w kolejności naturalnym wyborem ciała jest ciało $\mathbb{Z}_p$ – ciało reszt z dzielenia przez liczbę pierwszą p z dodawaniem i mnożeniem modulo p. Zastosowanie *Combinatorial Nullstellensatz* w tej sytuacji prowadzi do niezwykle eleganckich dowodów bardzo pięknych twierdzeń z teorii liczb. Niestety, w tym artykule brakuje już miejsca na przedstawienie przykładów, obiecuję jednak zaprezentować je w numerze wrześniowym w nadziei, że oczekiwanie zaostrzy apetyt nie tylko Czytelnika Bardzo Zainteresowanego.







Literatura

[1] N. Alon: *Combinatorial Nullstellensatz*, Combinatorics Probability and Computing 8 (1999), 7–29.

[2] N. Alon, Z. Füredi, *Covering the cube by affine hyperplanes*, European Journal of Combinatorics 14 (1993), 79–83.

[3] M. Michałek: *A short proof of Combinatorial Nullstellensatz*, American Mathematical Monthly 117 (2010), 821–823.

Zadania

Redaguje Łukasz BOŻYK

M 1534. Czy na płaszczyźnie można wskazać taki skończony zbiór $n \geqslant 3$ punktów $\mathcal{S}$, że dla każdego $O \in \mathcal{S}$ istnieją $A, B, C \in \mathcal{S}$ o tej własności, że punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC?
Rozwiązanie na str. 4

M 1535. Czy na płaszczyźnie można wskazać taki niezawarty w prostej, co najmniej trzyelementowy, zbiór punktów $\mathcal{S}$, że dla każdych trzech niewspółliniowych punktów $A, B, C \in \mathcal{S}$ środek okręgu opisanego na trójkącie ABC również należy do $\mathcal{S}$?
Rozwiązanie na str. 7

M 1536. Odcinek AB jest najkrótszym bokiem trójkąta ABC opisanego na okręgu o środku w punkcie I. Na bokach BC, CA znajdują się odpowiednio takie punkty D, E, że $EA = AB = BD$. Odcinki AD i BE przecinają się w punkcie P. Wykazać, że proste AB i PI są prostopadłe.
Rozwiązanie na str. 9

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 931. Podwójne ścianki szklanego naczynia termosu są posrebrzane w celu zmniejszenia przekazywania ciepła przez promieniowanie. Pomiędzy ściankami znajduje się rozrzedzony gaz. Ile wynosi maksymalne ciśnienie p tego gazu w temperaturze $T = 20°\mathrm{C}$, aby izolacja cieplna była skuteczna, jeżeli gazem jest azot, a odległość między podwójnymi ściankami termosu wynosi $d = 5\,\mathrm{mm}$? Średnica a cząsteczki azotu wynosi około 3,2 Å, stała Avogadro $N_A = 6{,}022 \cdot 10^{23}\,\mathrm{mol}^{-1}$, stała gazowa $R = 8{,}314\,\mathrm{J/(mol \cdot K)}$.
Wskazówka: Jak wynika z teorii kinetycznej potwierdzonej licznymi doświadczeniami, w rozrzedzonym gazie, pomiędzy dwoma zderzeniami, cząsteczka przebywa średnio odległość $\lambda = 1/(\pi a^2 \rho \sqrt{2})$, gdzie ρ oznacza liczbę cząsteczek gazu w jednostce objętości.
Rozwiązanie na str. 9

F 932. Dwie identyczne kostki lodu o temperaturze $T = -20°\mathrm{C}$ zderzają się. Ile, co najmniej, musiałaby wynosić prędkość każdej z kostek, aby w wyniku tego zderzenia kostki w całości wyparowały? Przyjmij, że w przybliżeniu ciepło właściwe lodu $c_L = 2{,}1\,\mathrm{J/(g \cdot K)}$, ciepło właściwe wody $c_W = 4{,}2\,\mathrm{J/(g \cdot K)}$, ciepło topnienia lodu $L_L = 330\,\mathrm{J/g}$, ciepło parowania wody $L_W = 2250\,\mathrm{J/g}$.
Rozwiązanie na str. 22