Wędrowanie po sześcianie

Joanna JASZUŃSKA

1. Farmer ma wilka, kozę, kapustę i łódkę zdolną pomieścić wraz z nim tylko jedno z nich. Jak może przeprawić się z całym swym dobytkiem na drugi brzeg rzeki, jeśli nie wolno zostawić bez opieki ani wilka z kozą, ani kozy z kapustą?

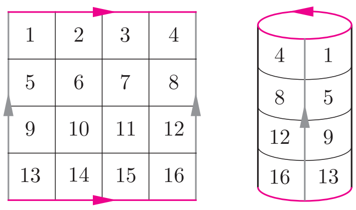
Polecam w sprawie kłopotów farmera zajrzeć też do *Delty* 6/2017.

2. Farmer ma wilka, kozę, kapustę, smoka i łódkę zdolną pomieścić wraz z nim tylko jedno z nich. Jak może przeprawić się z całym swym dobytkiem na drugi brzeg rzeki, jeśli nie wolno zostawić bez opieki ani wilka z kozą, ani kozy z kapustą, ani też smoka z wilkiem, chyba że w towarzystwie łagodzącej ich usposobienie kapusty?

3. Czy konik szachowy może odwiedzić dokładnie jeden raz każde pole szachownicy o wymiarach 4×4 i wrócić do punktu wyjścia?

Pojedynczy skok konika to dwa pola w jedną stronę i jedno w kierunku prostopadłym.

4. Szachownicę 4×4 zwinięto w rurkę i sklejono przeciwległe brzegi (rys. 1). Następnie sklejono końce tej rurki, uzyskując torus. Konik szachowy skacze po tym torusie zgodnie ze zwykłymi regułami opisanymi powyżej. Czy może on odwiedzić każde pole dokładnie raz i wrócić do punktu wyjścia?

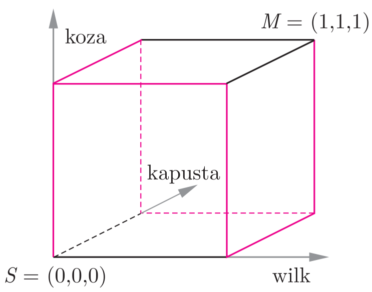


Rys. 1. Boki oznaczone tym samym kolorem sklejono zgodnie ze strzałkami. Konik może teraz skoczyć np. z pola 1 na pole 12.

5. Udowodnij, że wszystkie podzbiory zbioru skończonego można ustawić w ciąg, którego kolejne wyrazy różnią się jednym elementem.

Rozwiązania i wskazówki

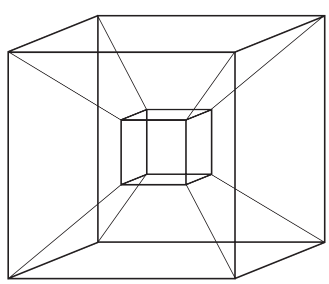
R1. Rozważmy wszystkie trójki (x, y, z) zer i jedynek oznaczających kolejno położenie wilka, kozy i kapusty: 0 – na pierwszym brzegu rzeki, 1 – na drugim. W przestrzeni trójki te to współrzędne wierzchołków sześcianu, przy czym wierzchołek $S = (0, 0, 0)$ to położenie początkowe dobytku farmera, a $M = (1, 1, 1)$ – docelowe (rys. 2).



Rys. 2. Kolorem oznaczono dobre krawędzie.

Ponieważ łódką można wozić najwyżej jedno stworzenie naraz, krawędzie tego sześcianu to wszystkie możliwe przewozy. Niektóre jednak są złe, np. krawędź $(0, 0, 0) - (0, 0, 1)$ oznacza, że farmer pozostawił wilka z kozą bez opieki i wiezie kapustę, co skończy się źle dla kozy. Zadanie sprowadza się więc do połączenia punktów S i M wzdłuż dobrych krawędzi, a to już łatwo zrobić na rysunku 2. $\square$

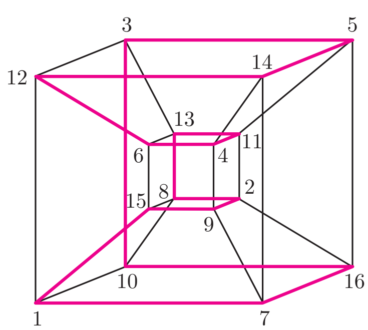
R2. Zadanie można rozwiązać podobnie jak poprzednie. Wystarczy rozważyć wszystkie czwórki (x, y, z, s) zer i jedynek, które tym razem są wierzchołkami czterowymiarowego *hipersześcianu* (rys. 3). Po usunięciu złych krawędzi łatwo znaleźć drogę od $(0, 0, 0, 0)$ do $(1, 1, 1, 1)$. $\square$



Rys. 3. Czterowymiarowy hipersześcian. Czwarty wymiar symbolicznie reprezentowany jest „do wewnątrz".

Wskazówka 3. Jak konik może dotrzeć do dwóch przeciwległych rogów szachownicy?

R4. Tak. Z każdego pola konik ma dokładnie cztery możliwe ruchy. Ilustrują je krawędzie czterowymiarowego hipersześcianu, a szukana droga odwiedzająca wszystkie jego wierzchołki (pola szachownicy) i wracająca do punktu wyjścia to tzw. *cykl Hamiltona* (rys. 4). $\square$



Rys. 4. Numery wierzchołków to numery pól szachownicy, kolorem oznaczono cykl Hamiltona.

Cykl z rysunku 4 powstał z dwóch osobnych cykli Hamiltona dla sześcianów trójwymiarowych (zewnętrznego i wewnętrznego), które połączono, usuwając z nich po jednej krawędzi (1-12 i 15-6) i dodając krawędzie 1-15 oraz 12-6. Podobnie cykl dla każdego trójwymiarowego sześcianu powstał z połączenia dwóch cykli dla kwadratów (podstaw tego sześcianu). Analogicznie można tworzyć cykle Hamiltona dla hipersześcianów n-wymiarowych, gdzie $n > 4$.

R5. Każdy podzbiór n-elementowego zbioru A można opisać ciągiem n zer i jedynek, gdzie 1 na k-tym miejscu oznacza, że k-ty element zbioru A należy do rozważanego podzbioru, a 0 – że nie należy. Wtedy podzbiory A to wierzchołki n-wymiarowego hipersześcianu, przy czym podzbiory różniące się jednym elementem połączone są krawędzią.

Szukany ciąg można wyznaczyć przez cykl Hamiltona na tym hipersześcianie, podobnie jak na rysunku 4 (ostatni i pierwszy podzbiór w takim ciągu też różnią się jednym elementem). $\square$

Literatura: Ian Stewart, *Another Fine Math You've Got Me Into*, New York: W.H. Freeman and Company, 1992.

Zadanie 5 pochodzi z XXIII Olimpiady Matematycznej.