O zastosowaniach *Combinatorial Nullstellensatz*

*Jacek DYMEL**

*Nauczyciel, V Liceum Ogólnokształcące im. Augusta Witkowskiego w Krakowie

Zadanie 6 z 48. Międzynarodowej Olimpiady Matematycznej (IMO) z 2007 roku było jednym z najtrudniejszych w historii Międzynarodowej Olimpiady Matematycznej. Oto jego treść.

Zadanie. Niech n będzie dodatnią liczbą naturalną. Przyjmijmy, że
$$S = \{(x, y, z) : x, y, z \in \{0, 1, \ldots, n\}, x + y + z > 0\}$$
jest zbiorem $(n+1)^3 - 1$ punktów w przestrzeni trójwymiarowej. Wyznacz najmniejszą możliwą liczbę płaszczyzn, których suma mnogościowa zawiera S, ale do której nie należy $(0, 0, 0)$.

Zadanie rozwiązało tylko pięciu zawodników: Konstantin Matwiejew z Rosji, Peter Scholze z Niemiec, Danylo Radczenko z Ukrainy, Iurie Boreico z Mołdawii i Pietro Verteci z Włoch. W zasadzie tylko znajomość twierdzenia *Combinatorial Nullstellensatz* (kombinatoryczne twierdzenie o rozmieszczeniu zer, nawiązujące do twierdzenia Hilberta o zerach), któremu poświęcony jest ten artykuł, umożliwiała szybkie rozwiązanie zadania. Noga Alon opublikował swój artykuł *Combinatorial Nullstellensatz* [1] w 1999 roku, a już w 2007 roku kilku uczestników IMO stosowało metodę w nim opisaną. Wspomniane twierdzenie jest naturalnym uogólnieniem dobrze znanego uczniom twierdzenia, że wielomian jednej zmiennej stopnia n o współczynnikach rzeczywistych ma co najwyżej n pierwiastków rzeczywistych, a jego treść jest następująca:

Twierdzenie (Combinatorial Nullstellensatz). *Niech $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ będzie niezerowym wielomianem n zmiennych stopnia $\sum_{i=1}^{n} m_i$, w którym współczynnik przy $x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n}$ jest różny od zera. Wówczas dla dowolnych zbiorów $S_1, \ldots, S_n \subset \mathbb{R}$ spełniających warunki $|S_i| > m_i$ dla $1 \leqslant i \leqslant n$, istnieją takie $c_i \in S_i$, że $P(c_1, \ldots, c_n) \neq 0$.*

Przedstawiony dowód można znaleźć w pracy [3], której autorem jest Mateusz Michałek, zdobywca srebrnego medalu na IMO w 2004 roku.

Dowód. Przeprowadzimy indukcję ze względu na stopień wielomianu P. Nietrudny dowód początku indukcji ($\deg P = 1$) pozostawiam Czytelnikowi Spragnionemu Ćwiczeń jako ćwiczenie.

Załóżmy teraz, że $k > 1$, oraz że teza zachodzi dla wszystkich wielomianów stopnia niższego niż k. Niech wielomian P ma stopień k. Bez straty ogólności można przyjąć, że $m_1 > 0$. Wybierzmy $a \in S_1$. Podobnie, jak w przypadku wielomianów jednej zmiennej, możemy podzielić wielomian P przez wielomian $(x_1 - a)$, otrzymując
$$P(x_1, \ldots, x_n) = (x_1 - a)Q(x_1, \ldots, x_n) + R(x_2, \ldots, x_n),$$
gdzie $R(x_2, \ldots, x_n) = P(a, x_2, \ldots, x_n)$ jest wielomianem $n-1$ zmiennych, natomiast Q musi zawierać nieznikający jednomian postaci $x_1^{m_1-1}x_2^{m_2} \cdots x_n^{m_n}$ oraz $\deg Q = k - 1$. Dla dowodu nie wprost załóżmy, że wielomian P nie spełnia tezy. Wówczas dla dowolnych $a_2 \in S_2$, …, $a_n \in S_n$ zachodzi równość $P(a, a_2, \ldots, a_n) = 0$, co oznacza, że także $R(a_2, \ldots, a_n) = 0$.

Wybierzmy teraz dowolnie $a_1 \in S_1 \setminus \{a\}$. Otrzymujemy równości:
$$0 = P(a_1, \ldots, a_n) = (a_1 - a)Q(a_1, \ldots, a_n) + R(a_2, \ldots, a_n).$$

Ponieważ $(a_1 - a) \neq 0$ oraz $R(a_2, \ldots, a_n) = 0$, więc $Q(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0$. Wielomian Q ma stopień $k-1$ i niezerowy współczynnik przy $x_1^{m_1-1}x_2^{m_2} \cdots x_n^{m_n}$ oraz przyjmuje wartość zero dla wszystkich $a_1 \in S_1 \setminus \{a\}$, $a_2 \in S_2$, …, $a_n \in S_n$, co jest sprzeczne z założeniem indukcyjnym. Uzyskana sprzeczność kończy dowód indukcyjny. □

Poniżej przedstawię zastosowania *Combinatorial Nullstellensatz* do zadań olimpijskich, aby w końcu pokazać rozwiązanie zadania z IMO z 2007 roku, które było pretekstem do opowiedzenia o tej metodzie.

Zadanie (Rosja 2007). W każdy wierzchołek wypukłego $2n$-kąta wpisano dwie różne liczby rzeczywiste. Udowodnić, że można z każdego wierzchołka usunąć po jednej liczbie w taki sposób, aby liczby w każdych dwóch sąsiednich wierzchołkach były różne.

Rozwiązanie zadania F 931.
Dla uzyskania dobrej izolacji cieplnej należy zredukować przewodzenie ciepła przez gaz znajdujący się pomiędzy ściankami termosu. Przewodzenie ciepła odbywa się poprzez zderzenia cząsteczek, a więc ciśnienie gazu powinno być dobrane tak, aby średnia droga między zderzeniami była większa niż odległość między ściankami. Zgodnie z równaniem stanu gazu doskonałego $pV = nRT$, gdzie V oznacza objętość gazu, n liczbę moli gazu, a T temperaturę w skali Kelvina. Liczba cząsteczek gazu w jednostce objętości $\rho = n N_A/V$. Korzystając z równania stanu oraz warunku $\lambda > d$ otrzymujemy:

$$p < \frac{RT}{\sqrt{2}\pi a^2 d N_A} \approx 1{,}78\,\mathrm{Pa} \approx \approx 1{,}34 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{mmHg}$$

Rozwiązanie. Niech S_i $(i = 1, \ldots, 2n)$ będzie dwuelementowym zbiorem liczb wpisanych w i-ty wierzchołek. Określmy wielomian $P(x_1, \ldots, x_n) = (x_1 - x_2)(x_2 - x_3)\cdots(x_{2n} - x_1)$. Wielomian P jest stopnia $2n$, współczynnik przy wyrażeniu $x_1 \cdots x_{2n}$, które jest stopnia $2n$, jest równy 2. Na podstawie *Combinatorial Nullstellensatz* istnieją $a_1 \in S_1$, $a_2 \in S_2$, ..., $a_{2n} \in S_{2n}$, takie że $P(a_1, \ldots, a_{2n}) \neq 0$. To oznacza, że każda z różnic: $(a_1 - a_2)$, $(a_2 - a_3)$, ..., $(a_{2n} - a_1)$ jest różna od 0, czyli istnieje taki wybór liczb ze zbiorów $S_1, \ldots, S_{2n}$, że $a_1 \neq a_2, a_2 \neq a_3, \ldots, a_{2n} \neq a_1$. □

Zadanie (5th NIMO Winter Contest 2014). Zdefiniujmy taką funkcję $\xi : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$, że $\xi(n,k) = 1$, gdy $n \leqslant k$ oraz $\xi(n,k) = -1$, gdy $n > k$ i zdefiniujmy wielomian

$$P(x_1, \ldots, x_{1000}) = \prod_{n=1}^{1000} \left(\sum_{k=1}^{1000} \xi(n,k) x_k \right).$$

Wyznacz współczynnik przy $x_1 \cdots x_{1000}$ w wielomianie P.

Rozwiązanie. Zauważmy, że wielomian P jest stopnia 1000. Załóżmy, że współczynnik przy $x_1 x_2 \cdots x_{1000}$ jest różny od 0. Zdefiniujmy zbiory $S_1 = S_2 = \cdots = S_{1000} = \{-1, 1\}$. Wówczas korzystając z *Combinatorial Nullstellensatz*, otrzymujemy takie elementy $c_i \in S_i$, gdzie $i \in \{1, \ldots, 1000\}$, że $P(c_1, \ldots, c_{1000}) \neq 0$. Z drugiej strony sumy częściowe $C_1 = c_1$, $C_2 = c_1 + c_2$, $C_3 = c_1 + c_2 + c_3$, ... definiują pewien „spacer po liczbach całkowitych", kończący się na $C = C_{1000}$. Liczba C musi być parzysta, dlatego spacer ten w pewnym momencie osiągnie $C/2$, zatem dla pewnego $k \leqslant 1000$ zachodzi $C_k = C/2$. Oznacza to jednak, że k-ty czynnik w definicji wielomianu P wynosi 0, co przeczy stwierdzeniu $P(c_1, \ldots, c_{1000}) \neq 0$. Zatem współczynnik przy $x_1 x_2 \cdots x_{1000}$ musi być równy 0. □

Przejdziemy teraz do rozwiązania przytoczonego na początku artykułu zadania 6 z IMO 2007, które jest trudniejsze niż poprzednie zadania.

Rozwiązanie (Danylo Radczenko). Niech $k \in \mathbb{N}_+$ i $k < 3n$. Weźmy k parami różnych płaszczyzn, których suma mnogościowa zawiera zbiór S i żadna z tych płaszczyzn nie przechodzi przez punkt $(0,0,0)$. Niech i-ta płaszczyzna będzie określona równaniem $a_i x + b_i y + c_i z = d_i$, gdzie $a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 \neq 0$ oraz $d_i \neq 0$. Rozważmy wielomian P postaci

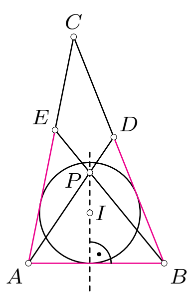
$$P(x,y,z) = \prod_{i=1}^{k} (a_i x + b_i y + c_i z - d_i) - \alpha \prod_{j=1}^{n} (x-j)(y-j)(z-j),$$

gdzie α jest tak dobrane, że $P(0,0,0) = 0$. Wielomian $P(x,y,z)$ przyjmuje wartość 0 dla każdego elementu należącego do zbioru S. Dla $k < 3n$ współczynnik przy $x^n y^n z^n$ nie jest równy 0, gdyż jest równy $\alpha \neq 0$. Dla zbiorów $S_1 = S_2 = S_3 = \{0, 1, \ldots, n\}$ zachodzą warunki: $|S_1| > n$, $|S_2| > n$, $|S_3| > n$, więc na podstawie *Combinatorial Nullstellensatz* istnieje taki punkt $(a,b,c) \in \{0,1,\ldots,n\}^3$, że $P(a,b,c) \neq 0$. Zatem istnieje punkt $(a,b,c) \in S$, dla którego $P(a,b,c) \neq 0$. Otrzymaliśmy sprzeczność. Wobec tego $k \geqslant 3n$.

Wystarczy jeszcze wskazać przykład $3n$ płaszczyzn, które spełniają warunki zadania. Są nimi

$$x = 1,\ x = 2,\ \ldots,\ x = n,\ y = 1,\ y = 2,\ \ldots,\ y = n,\ z = 1,\ z = 2,\ \ldots,\ z = n. \qquad \square$$

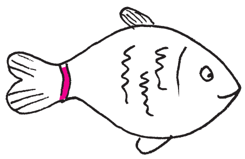
Rozwiązanie zadania M 1536.
Zauważmy, że prosta AI, jako dwusieczna kąta między ramionami trójkąta równoramiennego BAE, jest prostopadła do podstawy BE. Podobnie prosta BI jest prostopadła do prostej AD. Wobec tego punkt I jest ortocentrum trójkąta ABP, a zatem $PI \perp AB$.

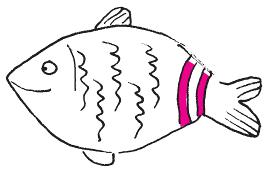


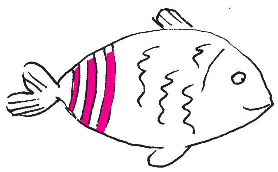
Powyższe zadanie jest pewną wariacją na temat problemu, jaki postawił Peter Komjáth: ile potrzeba hiperpłaszczyzn, aby pokryć wszystkie, z wyjątkiem jednego, wierzchołki kostki jednostkowej w przestrzeni n-wymiarowej. Rozwiązanie tego problemu pojawiło się przed 1993 rokiem, ale dopiero Noga Alon i Zoltan Füredi w 1993 roku w pracy [2] przedstawili krótkie i eleganckie rozumowanie. Poniższy dowód pochodzi z pracy [1].

Twierdzenie. *Niech $H_1, \ldots, H_m$ będzie rodziną hiperpłaszczyzn w $\mathbb{R}^n$, których suma zawiera wszystkie, z wyjątkiem jednego, wierzchołki kostki jednostkowej, czyli zbiór $\{0,1\}^n$. Wówczas $m \geqslant n$.*

Dowód. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że usuniętym wierzchołkiem jest punkt $(0, \ldots, 0)$. Niech hiperpłaszczyzna H_i dana będzie równaniem $\langle a_i, x \rangle = b_i$, gdzie $x = (x_1, \ldots, x_n)$ i $\langle a, b \rangle$ jest standardowym iloczynem skalarnym a i b. Dla







każdego $i \in \{1, \ldots, m\}$ zachodzi warunek $b_i \neq 0$, gdyż żadna z hiperpłaszczyzn nie przechodzi przez punkt $(0, \ldots, 0)$. Załóżmy dla dowodu nie wprost, że $m < n$ i zdefiniujmy wielomian

$$P(x) = (-1)^{n+m+1} \prod_{j=1}^{m} b_j \prod_{i=1}^{n} (x_i - 1) + \prod_{i=1}^{m} \big(\langle a_i, x\rangle - b_i\big).$$

Wielomian P ma stopień n i współczynnik przy $x_1 \cdots x_n$ równy

$$(-1)^{n+m+1} \prod_{j=1}^{m} b_j,$$

zatem różny od 0. Na podstawie *Combinatorial Nullstellensatz* dla $m_1 = \ldots = m_n = 1$ oraz $S_1 = \ldots = S_n = \{0, 1\}$, istnieje taki punkt $c \in \{0, 1\}^n$, że $P(c) \neq 0$. Punkt c jest różny od $(0, \ldots, 0)$, gdyż wielomian P przyjmuje wartość 0 dla $x = (0, \ldots, 0)$, a zatem punkt c należy do zadanego zbioru i nie należy do żadnej z hiperpłaszczyzn. Otrzymaliśmy sprzeczność, wobec tego $m \geqslant n$. Teraz wystarczy wskazać n hiperpłaszczyzn spełniających warunki zadania; są one zadane równaniami $x_1 = 1, \ldots, x_n = 1$. $\square$

Mam nadzieję, że powyższe przykłady przekonały Cię, Drogi Czytelniku, o użyteczności *Combinatorial Nullstellensatz* w rozwiązywaniu problemów z pozoru z nim niezwiązanych. Na zakończenie chciałbym zauważyć, że to wspaniałe twierdzenie jest słuszne dla wielomianów o współczynnikach z dowolnego ciała. Dotychczas używaliśmy jedynie ciała liczb rzeczywistych. Drugim w kolejności naturalnym wyborem ciała jest ciało $\mathbb{Z}_p$ – ciało reszt z dzielenia przez liczbę pierwszą p z dodawaniem i mnożeniem modulo p. Zastosowanie *Combinatorial Nullstellensatz* w tej sytuacji prowadzi do niezwykle eleganckich dowodów bardzo pięknych twierdzeń z teorii liczb. Niestety, w tym artykule brakuje już miejsca na przedstawienie przykładów, obiecuję jednak zaprezentować je w numerze wrześniowym w nadziei, że oczekiwanie zaostrzy apetyt nie tylko Czytelnika Bardzo Zainteresowanego.

Literatura

[1] N. Alon: *Combinatorial Nullstellensatz*, Combinatorics Probability and Computing 8 (1999), 7–29.

[2] N. Alon, Z. Füredi, *Covering the cube by affine hyperplanes*, European Journal of Combinatorics 14 (1993), 79–83.

[3] M. Michałek: *A short proof of Combinatorial Nullstellensatz*, American Mathematical Monthly 117 (2010), 821–823.

Zadania

Redaguje Łukasz BOŻYK

M 1534. Czy na płaszczyźnie można wskazać taki skończony zbiór $n \geqslant 3$ punktów $\mathcal{S}$, że dla każdego $O \in \mathcal{S}$ istnieją $A, B, C \in \mathcal{S}$ o tej własności, że punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC?
Rozwiązanie na str. 4

M 1535. Czy na płaszczyźnie można wskazać taki niezawarty w prostej, co najmniej trzyelementowy, zbiór punktów $\mathcal{S}$, że dla każdych trzech niewspółliniowych punktów $A, B, C \in \mathcal{S}$ środek okręgu opisanego na trójkącie ABC również należy do $\mathcal{S}$?
Rozwiązanie na str. 7

M 1536. Odcinek AB jest najkrótszym bokiem trójkąta ABC opisanego na okręgu o środku w punkcie I. Na bokach BC, CA znajdują się odpowiednio takie punkty D, E, że $EA = AB = BD$. Odcinki AD i BE przecinają się w punkcie P. Wykazać, że proste AB i PI są prostopadłe.
Rozwiązanie na str. 9

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 931. Podwójne ścianki szklanego naczynia termosu są posrebrzane w celu zmniejszenia przekazywania ciepła przez promieniowanie. Pomiędzy ściankami znajduje się rozrzedzony gaz. Ile wynosi maksymalne ciśnienie p tego gazu w temperaturze $T = 20°\mathrm{C}$, aby izolacja cieplna była skuteczna, jeżeli gazem jest azot, a odległość między podwójnymi ściankami termosu wynosi $d = 5\,\mathrm{mm}$? Średnica a cząsteczki azotu wynosi około 3,2 Å, stała Avogadro $N_A = 6{,}022 \cdot 10^{23}\,\mathrm{mol}^{-1}$, stała gazowa $R = 8{,}314\,\mathrm{J/(mol \cdot K)}$.
Wskazówka: Jak wynika z teorii kinetycznej potwierdzonej licznymi doświadczeniami, w rozrzedzonym gazie, pomiędzy dwoma zderzeniami, cząsteczka przebywa średnio odległość $\lambda = 1/(\pi a^2 \rho \sqrt{2})$, gdzie ρ oznacza liczbę cząsteczek gazu w jednostce objętości.
Rozwiązanie na str. 9

F 932. Dwie identyczne kostki lodu o temperaturze $T = -20°\mathrm{C}$ zderzają się. Ile, co najmniej, musiałaby wynosić prędkość każdej z kostek, aby w wyniku tego zderzenia kostki w całości wyparowały? Przyjmij, że w przybliżeniu ciepło właściwe lodu $c_L = 2{,}1\,\mathrm{J/(g \cdot K)}$, ciepło właściwe wody $c_W = 4{,}2\,\mathrm{J/(g \cdot K)}$, ciepło topnienia lodu $L_L = 330\,\mathrm{J/g}$, ciepło parowania wody $L_W = 2250\,\mathrm{J/g}$.
Rozwiązanie na str. 22