

# Abakus – najstarsze urządzenie rachunkowe

Bartosz KLIN\*

\*Instytut Informatyki, Wydział MIMUW

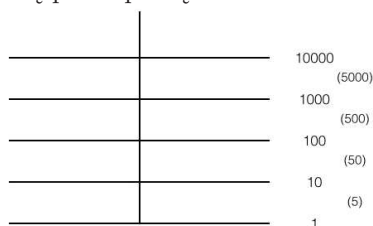
Każdy wie, że starożytni Rzymianie, a za nimi średniowieczni Europejczycy, zapisywali liczby nie cyframi znanymi nam dziś jako arabskie, a za pomocą tak zwanego systemu rzymskiego. W podstawowej wersji system ten opierał się na siedmiu znakach:

- I = 1,
- V = 5,
- X = 10,
- L = 50,
- C = 100,
- D = 500,
- M = 1000.

System ten do dziś jest stosowany na tyle często, że wciąż uczymy go dzieci w szkołach. Rzadko jednak zastanawiamy się nad tym, jak tak naprawdę rachowano na liczbach zapisywanych w ten sposób. Łatwo powiedzieć, że system rzymski ostatecznie odszedł do lamusa, bo był „niewygodny w użyciu nawet przy prostych działaniach”. Pamiętajmy jednak, że system ten niepodzielnie królował w Europie przez ponad tysiąc lat! Przez ten czas posługiwali się nim na co dzień kupcy, księgowi, intendenci i bankierzy i musieli mieć w tym dużą wprawę, mimo że z pewnością nie wszyscy mieli talent matematyczny. Jak sobie z tym radzili? Czy dzieci uczono na pamięć jakiejś rzymskiej tabliczki mnożenia, w której stało np.  $V \cdot V = XXV$  czy  $V \cdot X = L$ ?

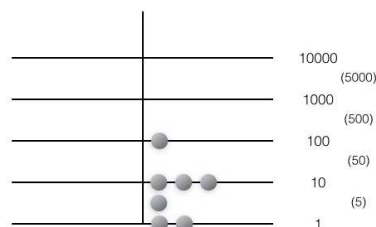
Nic z tych rzeczy. Dawni rachmistrze rzeczywiście liczyli bardzo sprawnie, ale zupełnie innymi metodami niż znane nam dziś „metody pisemne”. Zamiast zapisywać po kolei częściowe rezultaty rachunków na papierze, posługiwali się urządzeniem zwanym *abakusem*, który był pierwowzorem znanych nam liczydeł.

Abakus to bardzo stary wynalazek, który po raz pierwszy pojawił się u Sumerów około 2700 lat p.n.e. i był stopniowo udoskonalany, aż w VIII–V wieku p.n.e. osiągnął dojrzałą formę. W najprostszej wersji jest to kilka równoległych linii przeciętych linią prostopadłą.



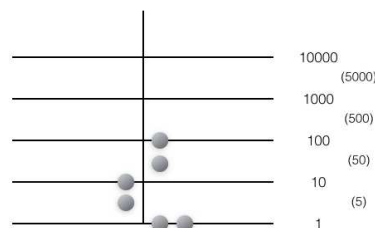
Na równoległych liniach umieszcza się kamyki (lub inne małe przedmioty) oznaczające odpowiednio jedność, dziesiątki, setki itd. Można je także umieszczać pomiędzy liniami, oznaczając w ten sposób piętki, pięćdziesiątki, pięćsetki itd. Kamienie umieszczone na lewo od pionowej linii środkowej oznaczają liczby *ujemne*. Dzięki nim można reprezentować tę samą liczbę na różne sposoby.

Przykładowo, liczbę 137 można przedstawić tak



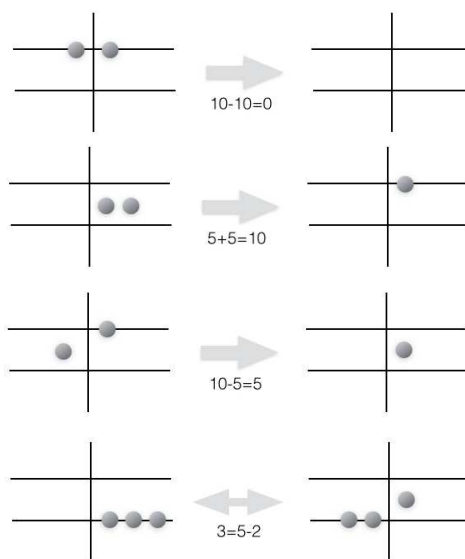
$$137 = 100 + (10 + 10 + 10) + 5 + (1 + 1)$$

albo tak

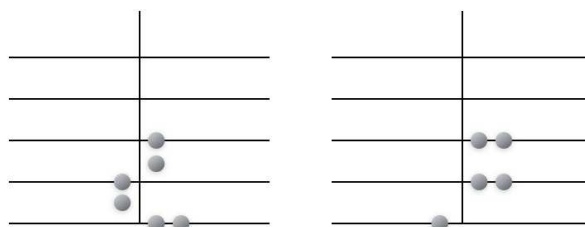


$$137 = 100 + 50 - 10 - 5 + (1 + 1).$$

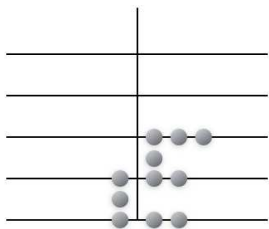
Można podać kilka prostych reguł przekładania kamieni, które upraszczają reprezentację, nie zmieniając wartości reprezentowanej liczby.



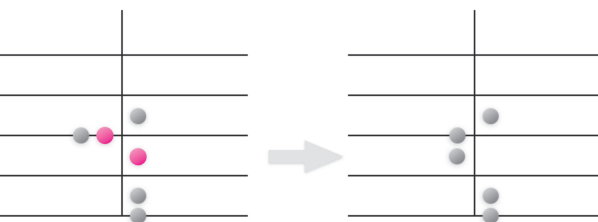
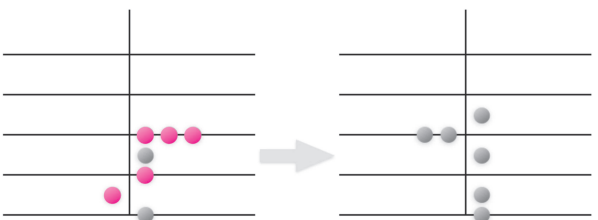
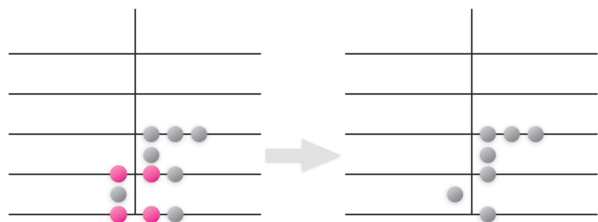
Korzystając z tych reguł, wprawny rachmistrz mógł szybko dodawać duże liczby. Przykładowo, aby dodać 137 do 219,



należało połączyć wszystkie kamienie reprezentujące obie liczby na abakusie,



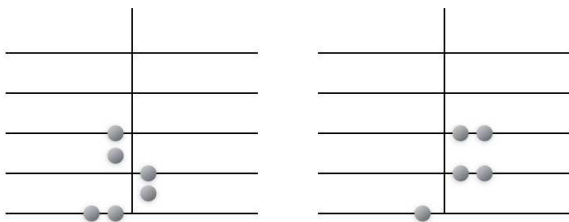
a następnie upraszczać zgodnie z regułami



i wreszcie odczytać wynik

$$500 - 100 - 50 + 5 + 1 = 356.$$

Odejmowanie jest równie łatwe: aby odjąć 137 od 219, wystarczy przedstawić odejmowaną liczbę symetrycznie, zamieniając lewą i prawą stronę,



a następnie postępować, jak przy dodawaniu.

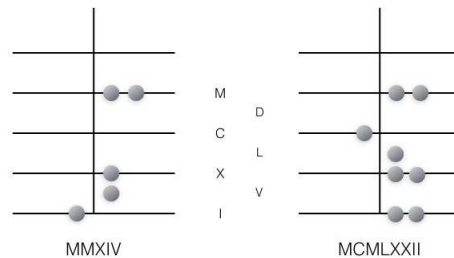
Zauważmy, że rachunki na abakusie całkiem dobrze pasują do rzymskiego systemu zapisywania liczb.

Przykładowo, aby wykonać odejmowanie

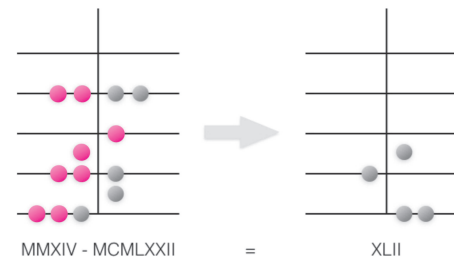
$$\text{MMXIV} - \text{MCMLXXII} = ?,$$

należy rozmieścić kamienie na abakusie, przestrzegając zasady, że cyfry, które występują przed cyframi odpowiadającymi większym liczbom (tak jak C występuje przed M w liczbie MCMLXXII),

kładziemy po „ujemnej” stronie abakusa

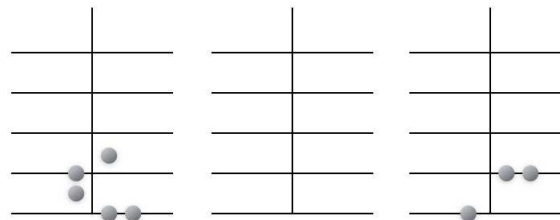


a następnie wykonać zwykle odejmowanie

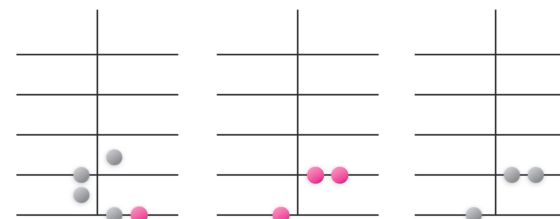


i odczytać wynik XLII.

Mnożenie na abakusie jest tylko nieco bardziej skomplikowane. Zilustrujemy je na przykładzie. Aby obliczyć iloczyn  $37 \times 19$ , użyjemy trzech abakusów. Na dwóch ustawimy czynniki, a na trzecim – środkowym – obliczymy wynik.



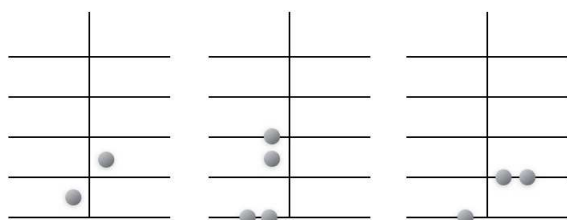
Mnożenie rozpoczynamy od wybrania z abakusa po lewej stronie jednego kamienia położonego na linii jedności. Zdejmujemy ten kamień, a na środkowym abakusie dokładamy kopię ustawienia z prawego abakusa.



Następnie powtarzamy tę operację dla wszystkich kamieni po lewej stronie na liniach jedności, dziesiątek, setek itd. (kamienie leżące pomiędzy liniami zostawiamy na razie w spokoju). Pamiętajmy przy tym, że:

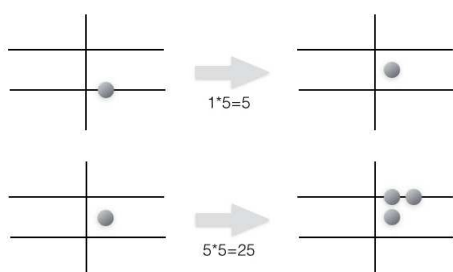
- jeżeli po lewej zdejmujemy kamień z linii dziesiątek, to liczbę z prawej strony kopiujemy na środek o jedną linię wyżej; jeżeli zdejmujemy kamień z linii setek, to kopiujemy o dwie linie wyżej itd.,
- jeżeli po lewej zdejmujemy kamień po lewej stronie pionowej linii, tzn. żeton „ujemny”, to kopiując liczbę z prawej na środek, zamieniamy lewą i prawą stronę.

W naszym przykładzie, po uproszczeniu, wygląda to tak

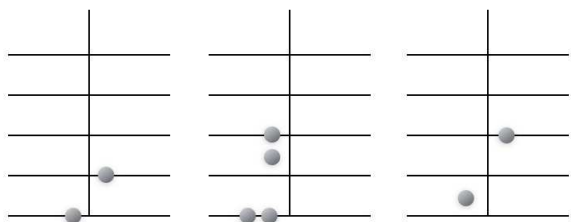


Doszlśmy do sytuacji, w której po lewej stronie nie ma już żadnego kamienia na żadnej linii. Aby poradzić sobie z kamieniami pomiędzy liniami (na pozycji piętek, pięćdziesiątek itd.), liczbę na lewym abakusie podzielimy przez 5, a na prawym – pomnożymy przez 5.

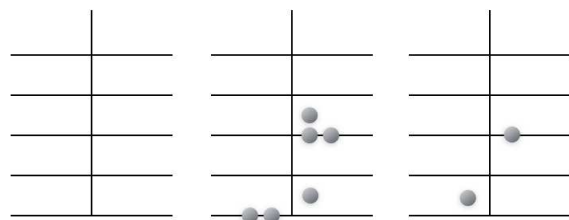
Dzielenie przez 5 po lewej jest bardzo łatwe, bo wszystkie kamienie leżą tam pomiędzy liniami. Wystarczy każdy z nich przesunąć w dół na najbliższą linię. Mnożenie przez 5 po prawej stronie nie jest dużo trudniejsze, wystarczy dla każdego kamienia zastosować jedną z poniższych reguł



i ewentualnie uprościć wynik. W naszym przykładzie otrzymujemy



Dalej postępujemy jak poprzednio, zdejmując po kolei kamienie z lewej strony, i za każdym razem upraszczając wynik. Na końcu otrzymujemy



Teraz wystarczy odczytać wynik ze środkowego abakusa

$$500 + (100 + 100) + 5 - (1 + 1) = 703 = 37 \times 19.$$

Dzielenie na abakusie nie jest dużo bardziej skomplikowane. Przy odrobinie wprawy wszystkie te obliczenia wykonuje się szybko i bez większego wysiłku. Nic dziwnego, że przez stulecia abakus, uzupełniony o podstawową obsługę ułamków, był podstawowym narzędziem pracy dla kupców i ekonomów.

Zaletą abakusa jest jego prosta konstrukcja.

Wystarczy mieć garść kamieni czy innych małych przedmiotów, narysować na piasku kilka linii i można zacząć rachunki. Nie trzeba też znać tabliczki mnożenia! Do prostych, codziennych obliczeń można tę konstrukcję jeszcze uprościć i zrezygnować z podziału na lewą (ujemną) i prawą (dodatnią) część. Praktyczni Rzymianie konstruowali w ten sposób przenośne, wygodne abakusy, do których żetony były przymocowane na stałe. Zamiast kłaść je i zdejmować z linii, można je było przesuwając, aby zaznaczyć, które z nich należą do reprezentowanej liczby. W ten sposób powstał pierwowzór dzisiejszych liczydeł.

Abakus przez stulecia niepodzielnie królował w Europie jako narzędzie rachunkowe. Zaczęło się to zmieniać dopiero w XII wieku, kiedy zawitał do Europy wynalazek z Indii: notacja pozycyjna i cyfry dziesiętne, zwane dziś arabskimi, wraz z zerem i z zupełnie nowymi metodami obliczania operacji arytmetycznych, dobrze nam dziś znanymi jako dodawanie, mnożenie i dzielenie pisemne „pod kreską”.

Nowe metody przyjmowały się z oporami. Europejczycy, przyzwyczajeni do tradycyjnych oznaczeń rzymskich, nieufnie podchodzili do nowych i niezrozumiałych znaków, które – co gorsza – pochodziły spoza świata chrześcijańskiego. Bankierom we Florencji w 1299 roku zakazano używania cyfr arabskich, a Uniwersytet w Padwie w 1348 roku zarządził, że cenniki sprzedawanych książek należy sporządzać „nie cyframi, a zrozumiałymi literami”. Spór między stosującymi nowe metody *algorystami* a konserwatywnymi *abakistami* trwał ponad trzy stulecia. Wreszcie jednak zalety zapisu pozycyjnego, a także upowszechnienie stosunkowo taniego papieru, na którym można było liczyć pisemnie, przeważały i w XVI wieku abakus, najstarsze urządzenie obliczeniowe, ostatecznie przeszedł do historii.

Rzymski system liczbowy natomiast, o czym świadczy choćby niniejsze zdanie, nawet w XXI wieku ma się dobrze.



Spór między algorystami (po lewej) i abakistami (po prawej), rycina z XVI wieku