Zadania o przeprawie przez rzekę

Tomasz KAZANA

Słowo „starą” naprawdę nie jest użyte na wyrost. Zagadka (ta, jak i kolejne) pochodzi z ósmowiecznego zbioru zadań napisanego przez błogosławionego Alkuina z Yorku.

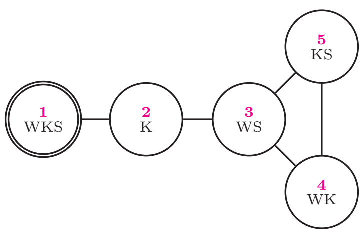
Przypomnijmy starą zagadkę:

Zagadka 1. *Przewoźnik musi przeprawić się przez rzekę. Wiezie wilka, kozę i kapustę. Jego łódka umożliwia mu wzięcie ze sobą na pokład jednocześnie tylko jednego elementu inwentarza. Dodatkowo jeśli zostawi na brzegu bez opieki wilka z kozą, to wilk pożre kozę. Podobnie kapusta nie przetrwa pozostawiona z kozą. Czy przewoźnik jest w stanie przewieźć cały inwentarz na drugi brzeg?*

Ten problem rozwiązujemy za pomocą teorii grafów. Rozważamy możliwe „stany”, czyli opisy tego, co się znajduje po której stronie rzeki i analizujemy, z których do których stanów da się *przejść (przepłynąć?)*.

Pomysł zmniejszenia (o połowę!) liczby stanów pochodzi od Michała Wojciechowskiego. W dobie komputerów może dużego znaczenia to nie ma, ale gdy chcemy zagadkę rozwiązać na papierze czy tablicy, to taka wskazówka jest nieoceniona.

Aby zmniejszyć ilość stanów, umawiamy się, że opisem stanu będzie zbiór tych elementów, które znajdują się tam, gdzie łódka i przewoźnik. Czytelnik Zaniepokojony może protestować. Przecież w takiej definicji niektóre sytuacje „sklejają się”, tzn. są opisane przez ten sam stan! Istotnie, jeśli stan nie koduje informacji o tym, po której stronie rzeki znajduje się łódka, to ustawienia symetryczne są dla nas nieodróżnialne. W szczególności sytuacja początkowa i docelowa opisana jest tym samym stanem – zbiorem wszystkich elementów. To jednak nie jest problem. Wystarczy sobie uświadomić, że każdy ruch zmienia pozycję łódki. A więc każda ścieżka, która zaczyna się na jednej stronie rzeki, a kończy na drugiej, musi być nieparzystej długości.

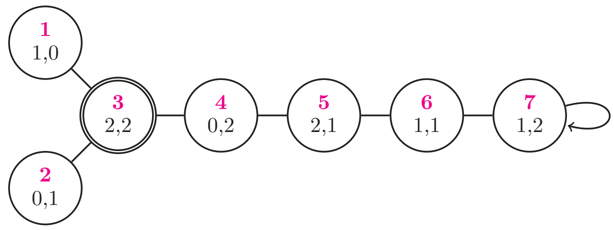


Rys. 1. Oznaczenia: W – wilk, K – koza, S – kapusta; cykl nieparzystej długości: 1, 2, 3, 4, 5, 3, 2, 1 (7 krawędzi).

Powyższa obserwacja w zasadzie kończy opis tego rozumowania. Po prostu rysujemy graf możliwych przejść i przekonujemy się, że istnieje w nim cykl nieparzystej długości przechodzący przez stan początkowy (rys. 1).

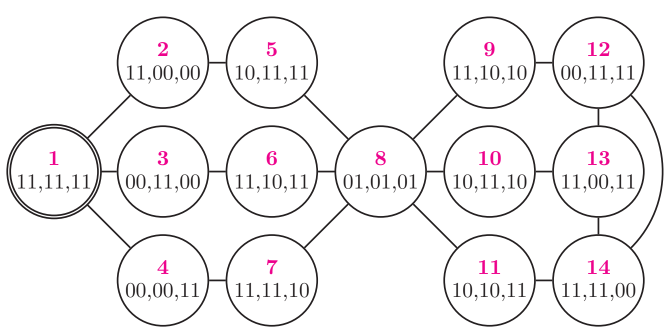
Zupełnie analogicznie rozwiązujemy kolejne zagadki (rys. 2, 3).

Zagadka 2. *Przez rzekę chce się przeprawić dwoje dorosłych i dwoje dzieci. Mają tratwę, w której mieści się albo jeden dorosły, albo dwójka dzieci (albo oczywiście jedno dziecko). Czy cała grupa może bezpiecznie przedostać się na drugi brzeg?*



Rys. 2. Napis i, j oznacza i dorosłych oraz j dzieci; cykl nieparzystej długości: 3, 4, 5, 6, 7, 7, 6, 5, 4, 3 (9 krawędzi).

Zagadka 3. *Przez rzekę chcą się przeprawić trzy pary rodzeństwa typu brat-siostra. Ich tratwa może pomieścić tylko dwie osoby. Musimy zachować następujące ograniczenie: żaden z braci nie pozwoli, aby jego siostra przebywała w obecności jakiegokolwiek innego mężczyzny, jeśli on sam nie jest przy tym obecny. Czy cała grupa może bezpiecznie przedostać się na drugi brzeg?*



Rys. 3. Opis stanu: pary bitów oddzielone przecinkami opisują kolejne rodzeństwa; pierwszy bit określa obecność brata, drugi – siostry; cykl nieparzystej długości: 1, 3, 6, 8, 10, 13, 12, 14, 13, 10, 8, 6, 3, 1 (13 krawędzi).

Rozwiązanie zadania F 930.
Na dnie jeziora na ciśnienie wewnątrz pęcherzyka składa się ciśnienie atmosferyczne p_0, ciśnienie słupa wody $p_h = \rho g h$ (g – przyspieszenie ziemskie, ρ – gęstość wody) i ciśnienie wynikające z napięcia powierzchniowego p_n. Przy powierzchni wody na ciśnienie w pęcherzyku składa się ciśnienie atmosferyczne p_0 i ciśnienie wynikające z napięcia powierzchniowego p_n.

Dodatkowe ciśnienie w pęcherzyku wywołane przez napięcie powierzchniowe możemy znaleźć posługując się następującym rozumowaniem: wyobraźmy sobie pęcherzyk o promieniu R. Jeżeli powiększymy jego promień o ΔR to powierzchnia wzrośnie o

$$\Delta S = \Delta(4\pi R^2) = 8\pi R \Delta R.$$

Spowoduje to wzrost energii powierzchni pęcherzyka o $\Delta E = \Delta S \sigma$. Powiększenie promienia pęcherzyka jest skutkiem wykonania pracy

$$W = S \Delta p \Delta R = 4\pi R^2 \Delta p \Delta R.$$

Korzystając z tego, że $W = \Delta E$ otrzymujemy na dodatkowe ciśnienie wyrażenie $\Delta p = 2\sigma/R$.

Korzystając z prawa Boyle'a–Mariotte'a mamy

$$(p_0 + p_h + p_n)\left(\tfrac{4}{3}\pi d_1^3\right) = (p_0 + p_n)\left(\tfrac{4}{3}\pi d_2^3\right)$$

czyli

$$(p_0 + \rho g h + 2\sigma/d_1) d_1^3 = (p_0 + p_n) d_2^3.$$

Stąd znajdujemy $d_2 \approx 0{,}053$ mm. Zauważmy, że wkład od napięcia powierzchniowego jest znacznie mniejszy od ciśnienia atmosferycznego i hydrostatycznego i może być pominięty.