δ Obsesja dużych liczb

*Karol GRYSZKA**

*Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie

Kiedy miałem kilka, kilkanaście lat, wraz ze starszym bratem często graliśmy w grę. Należało w swojej kolejce podać liczbę większą od wskazanej przez poprzednika. Przegrywał oczywiście ten, kto nie był w stanie podać liczby większej. Czasami ponosiła nas fantazja i mówiliśmy „nieskończoność" albo „nieskończoność plus nieskończoność". Dziś już wiem, że nieskończoność liczbą nie jest, a działania na nieskończonościach są bardziej wyrafinowane, niż podejrzewałem. Gdyby i Tobie, drogi Czytelniku, przyszło kiedyś wymienić (albo usłyszeć) jakąś dużą liczbę, możesz sięgnąć do poniższej listy. Nie są to bowiem byle jakie liczby...

$\pi = 3{,}1415926535897932384\,6264338327950288419 71\ldots$

40. Choć znamy wiele miliardów cyfr rozwinięcia dziesiętnego liczby π, to pierwsze 40 wystarcza, aby zmierzyć rozmiary znanego nam Wszechświata z dokładnością do rozmiaru atomu wodoru – najmniejszego atomu występującego w przyrodzie. Dokładność jest więc iście imponująca!

Jeden z przykładów dowodu twierdzenia Pitagorasa, w wersji mechanicznej, można znaleźć na okładce numeru.

370 – istnieje co najmniej tyle różnych metod dowodzenia Twierdzenia Pitagorasa. Jest to rekordzista dowodowy wśród twierdzeń matematycznych.

Dane szacunkowe – stan na sierpień 2016.

7 400 000 000 – tylu jest w przybliżeniu mieszkańców planety Ziemia. Dokładna liczba nie może być podana, gdyż, po pierwsze, nie jest znana, a po drugie, ulega częstej zmianie (statystycznie kilka razy na sekundę). Według szacunków ONZ liczba ta do końca wieku wzrośnie do około 11 miliardów.

106 000 000 000 ($106 \cdot 10^9$) – szacunkowa liczba wszystkich ludzi, jacy kiedykolwiek żyli na Ziemi. Zaczynamy nasze obliczenia dziesiątki tysięcy lat wstecz i uwzględniamy wszystkie osoby zmarłe aż do dnia dzisiejszego – oczywiście nie zapominamy o ponad siedmiu miliardach żyjących obecnie. Zauważmy, że aktualnie żyje aż 7% wszystkich osób, jakie kiedykolwiek się urodziły.

Wspomniane 200 terabajtów to mniej więcej tyle, ile wynoszą zasoby elektroniczne Biblioteki Kongresu – amerykańskiej biblioteki w Waszyngtonie, będącej największą tego typu instytucją na świecie. Poza materiałami elektronicznymi znajduje się w niej m.in. 142 mln dokumentów, 29 mln książek, 12 mln fotografii oraz ponad pół miliona filmów. Materiały zajmują w sumie około 856 km półek.

219 902 325 555 200 bajtów (około 200 terabajtów) – takiej mniej więcej ilości danych użyto do rozstrzygnięcia hipotezy *dwukolorowalności trójek pitagorejskich*. Zajęło to w sumie 35 000 godzin pracy komputerów – na szczęście pracowało nad tym wiele komputerów równocześnie. Treść problemu jest następująca: czy jest możliwe pokolorowanie każdej liczby naturalnej na czerwono lub niebiesko w taki sposób, by żadna trójka a, b, c, spełniająca równanie $a^2 + b^2 = c^2$, nie była jednokolorowa. Na przykład, jeżeli 5 i 12 są niebieskie, to 13 musi być czerwone. Hipoteza ta jest fałszywa, daje się we wskazany sposób pokolorować liczby naturalne od 1 do 7824 (nawet na parę sposobów), ale gdy dołączymy liczbę 7825, odpowiednie kolorowanie nie istnieje co sumiennie sprawdziły komputery.

43 252 003 274 489 856 000 (około 43 tryliony lub $43 \cdot 10^{18}$) – to wszystkie możliwe konfiguracje elementów na kostce Rubika. Na całym świecie oryginalną kostkę oraz jej warianty sprzedano w kilkuset milionach egzemplarzy, co czyni ją najpopularniejszą zabawką w historii.

Jak wyznaczyć liczbę konfiguracji? Każdy róg (element trójkolorowy) może być ustawiony w jednym z ośmiu miejsc i w jednej z trzech orientacji, co daje łącznie $8! \cdot 3^8$ możliwości. Każda krawędź (element dwukolorowy) może być ustawiona w jednym z dwunastu miejsc i w jednej z dwóch orientacji – łącznie $12! \cdot 2^{12}$ ustawień. Każdy środek (element jednokolorowy) ma stałe położenie względem ustalonej orientacji, wobec tego jest tylko jeden istotny sposób na ich ustawienie. Ostatecznie otrzymujemy liczbę $8! \cdot 12! \cdot 2^{12} \cdot 3^8$.

Tylko 1/3 wszystkich orientacji rogów i tylko połowa wszystkich orientacji krawędzi jest dopuszczalna. Wśród wszystkich permutacji krawędzi i rogów (bez zmiany orientacji!) tylko połowa jest dopuszczalna (jest to tak zwany problem parzystości), stąd dzielimy przez $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$.

Ale nie jest to poprawna odpowiedź. Istnieją ograniczenia narzucane przez mechanizmy, które redukują liczbę dopuszczalnych możliwości.

Ostateczna liczba zmniejsza się dwunastokrotnie, a $8! \cdot 11! \cdot 2^{12} \cdot 3^8$ to właśnie 43 252 003 274 489 856 000.

808 017 424 794 512 875 886 459 904 961 710 757 005 754 368 000 000 000 (około 808 oktyliardów lub $808 \cdot 10^{51}$). W XX wieku ważnym zagadnieniem w matematyce (dokładniej teorii grup) była kwestia opisania, klasyfikacji pewnych obiektów (tak zwanych skończonych grup prostych, cokolwiek to oznacza).

Pełna klasyfikacja została osiągnięta nakładem pracy wielu matematyków oraz ponad dziesięciu tysięcy stron publikacji. Jej efektem było wyróżnienie „cegiełek”, elementów, z których można zbudować wszystkie obiekty klasyfikowane. Okazało się również, że istnieje największa taka cegiełka – grupa mająca tyle elementów, ile wynosi liczba otwierająca poprzedni akapit. Grupa ta nazywa się po angielsku *Monster group*, co możemy dość swobodnie przetłumaczyć na *grupę potworną* (żartobliwie i pieszczotliwie nazywaną również *potworkiem*).

$\mathbf{10^{80}}$ (100 tridecylionów). Szacowana liczba atomów w obserwowalnym Wszechświecie. Nie jesteśmy w stanie dokładnie ich policzyć, bazujemy jedynie na średniej gęstości materii w stosunku do znanych rozmiarów Wszechświata i na tej podstawie wyznaczamy wspomnianą liczbę. Jak ogromna jest to liczba? Przypuśćmy, że atomy ustawiliśmy w linii prostej. Każdy z nich ma średnicę około jednego nanometra (czyli 10^{-9} metra). Wszystkie utworzą linię długości około 10^{68} kilometrów czyli 10^{55} lat świetlnych.

Prędkość światła w próżni to w przybliżeniu 300 000 km/s, a rok juliański to 31 557 600 sekund. Ich iloczyn to 9 467 280 000 000 km, czyli w przybliżeniu 10^{13} kilometrów na każdy rok. Wielkość ta nosi nazwę *roku świetlnego*.

$\mathbf{10^{100}}$ (10 seksdecyliardów lub *googol*) razem z 10^{googol}, czyli *googolplexem* zdobyły popularność w różnych teleturniejach. W brytyjskim wydaniu „Milionerów” w pytaniu za milion funtów padło: Jak jest nazywana liczba 1 ze stoma zerami?

$\mathbf{2^{74207281} - 1}$ oznaczana także jako $M_{74207281}$. Jest największą znaną liczbą pierwszą, składa się z 22 338 618 cyfr. Gdybyśmy wydrukowali tę liczbę na papierze, mieszcząc 50 linii na stronie i 100 cyfr w każdej linii, zadrukowalibyśmy 4 468 stron. Taki plik kartek miałby około pół metra grubości i ważył kilka kilogramów. Papierowa wersja została zaprezentowana przez Matta Parkera na kanale YouTube „Numberphile”.

Ogólnie liczby postaci $2^p - 1$, gdzie p jest liczbą pierwszą, nazywamy *liczbami Mersenne'a*.
Liczba cyfr liczby naturalnej n wynosi $[\log_{10} n] + 1$. Wyznaczmy, ile cyfr ma liczba $M_{74207281}$:

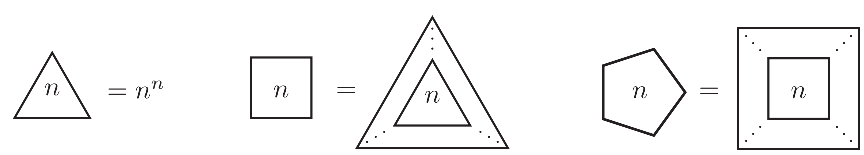
$$\begin{aligned}\log_{10} 2^{74207281} &= 74207281 \cdot \log_{10} 2 = \\ &= 74207281 \cdot 0{,}30102999566398\ldots = \\ &= 22338617{,}47766\ldots\end{aligned}$$

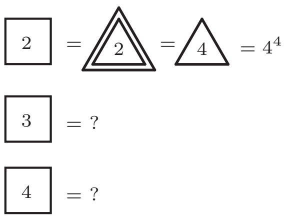
Zatem największa znana liczba pierwsza ma

$$[22338617{,}47766\ldots] + 1 = 22338618 \text{ cyfr}$$

($[x]$ oznacza część całkowitą z liczby x). Od początkowej liczby nie zostało odjęte 1, ale nie ma to wpływu na liczbę cyfr.

Mega i Liczba Mosera. Wprowadzimy notację, pochodząca od Hugona Steinhausa, rozszerzoną później przez Leo Mosera.





Liczba n w kwadracie oznacza liczbę n w n zagnieżdżonych trójkątach (w wieży potęgowej jest 2^n takich samych liczb). Podobnie w dalszej części mamy n wzajemnie zagnieżdżonych kwadratów. Ogólnie można zdefiniować liczbę n wpisaną w wielokąt o k bokach jako liczbę n wpisaną w n zagnieżdżonych wielokątach o $k - 1$ bokach.

Steinhaus upodobał sobie szczególnie: *mega* – dwójka w pięciokącie – oraz *megiston* – dziesiątka w pięciokącie. Te dwie liczby czasami zamiast w pięciokącie zapisuje się w okręgu.

Liczba Mosera to 2 w wielokącie, którego liczba boków jest równa liczbie mega (wielokąt taki nazywamy *megagonem*). Żeby móc porównać te liczby z dotychczasowymi, podamy oszacowanie (choćby grube). Jeżeli $a \uparrow\uparrow b$ oznacza $a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}}$, gdzie wieża potęgowa liczb a zawiera b liczb, to

$$10 \uparrow\uparrow 257 < \text{mega} < 10 \uparrow\uparrow 258.$$

Liczba Grahama. Rozszerzamy notację strzałkową, będziemy pisali

$$\uparrow^n = \underbrace{\uparrow \ldots \uparrow}_{n},$$

gdzie

$$a \uparrow^n b = \begin{cases} ab, & \text{dla } n = 0, \\ 1 & \text{dla } n \geqslant 0 \text{ oraz } b = 0, \\ a \uparrow^n b = \underbrace{a \uparrow^{n-1} (a \uparrow^{n-1} (\ldots \uparrow^{n-1} a))}_{b \text{ kopii } a} & \text{w przeciwnym wypadku.} \end{cases}$$

$3 \uparrow^3 3 = 3 \uparrow^2 (3 \uparrow^2 3)$
$3 \uparrow^2 3 = 3^{3^3} = 3^{27} = 7\,625\,597\,484\,987$
$a \uparrow^4 b = \underbrace{a \uparrow^3 (a \uparrow^3 (\ldots \uparrow^3 a))}_{b \text{ kopii } a}$

Niech teraz $f(n) = 3 \uparrow^n 3$, wtedy *liczba Grahama* zdefiniowana jest jako $G = f^{64}(4)$, gdzie potęga przy funkcji oznacza liczbę powtórzeń. Liczba ta wystąpiła w badaniach nad uogólnionym problemem Ramseya.

Ciekawostka: G jest „znacznie” większe od liczby Mosera. Pokazano, że ta ostatnia nie jest większa od $f^3(4)$.

Posłowie I: Naprawdę duże liczby

Jaką największą liczbę może zwrócić program długości co najwyżej k (o co najwyżej k znakach)?

Pojęciem dualnym do wspominanego obok jest *złożoność Kołmogorowa* (od Andrieja Kołmogorowa) liczby $n \in \mathbb{N}$ – długość najkrótszego programu, który zwraca liczbę n.

Przez $\mathrm{gener}(k)$ oznaczmy odpowiedź na powyższe pytanie ($k \in \mathbb{N}$). Program, który ma 100 znaków, może zwrócić liczbę zdecydowanie większą niż 100. Program złożony z 1000 znaków może zwrócić liczbę bardzo zdecydowanie większą niż 1000, ale jak bardzo zdecydowanie? Jak szybko rosną możliwości programu wraz ze wzrostem liczby jego znaków?

Znaków, których możemy użyć do napisania programów, jest skończenie wiele. Stąd programów o długości co najwyżej k również jest skończenie wiele, a tylko niektóre z nich będą działać poprawnie i zwracać liczby. Niewątpliwie któryś z nich wygeneruje liczbę największą.

Może zdarzyć się, że żaden program o długości co najwyżej k nie zwraca liczby. W takiej sytuacji ustalmy, że $\mathrm{gener}(k) = 0$. To się zdarzy tylko dla małych k.

Okazuje się, że $\mathrm{gener}(i)$ dla niedużych $i \in \mathbb{N}$ są naprawdę pokaźne, przy nich liczby Mosera lub Grahama to zupełne mikrusy. Co ciekawe, kiedy wybierzemy konkretne i, wartość $\mathrm{gener}(i)$ jest *nieobliczalna*, nie da się obliczyć jej dokładnej wartości – wyjaśnienie w tekście na sąsiedniej stronie. Można natomiast pokazać, od jakiej liczby $\mathrm{gener}(i)$ na pewno jest większe – stąd śmiałość w nazywaniu liczby Mosera mikrusem. Przyjrzyjmy się poniższemu programowi.

```
1  Function arrow(a, n, b, k)
2      if (k > 1) then
3          return arrow(a, n, arrow(a, n, b, k − 1), 1)
4      else if (n == 0) then
5          return ab
6      else if (b == 0) then
7          return 1
8      else
9          return arrow(a, n − 1, a, b − 1)
10 return arrow(3, 4, 3, 64)
```

Funkcja $arrow(a, n, b, k)$ zwraca liczbę $\underbrace{a \uparrow^n (a \uparrow^n (\ldots (a \uparrow^n b) \ldots))}_{k \text{ strzałek}}$. Przyjrzyjmy się dlaczego tak jest. Linie 4-9 rozpisują definicję notacji strzałkowej, opisanej we wcześniejszym artykule. Co się dokładniej w programie dzieje?

- Linie 2-3 – rozważamy przypadek, gdy liczba strzałek k jest większa niż 1. Wtedy trzeba zrobić jedną strzałkę, a potem jeszcze $k - 1$.
- Zachodzi $a \uparrow^0 b = ab$, co obsługują linie 4-5 oraz $a \uparrow^n 0 = 1$, co obsługują linie 6-7.
- $a \uparrow^n b = \underbrace{a \uparrow^{n-1} (a \uparrow^{n-1} (\ldots (a \uparrow^{n-1} a) \ldots))}_{b-1 \text{ strzałek}}$, co implementują linie 8-9.