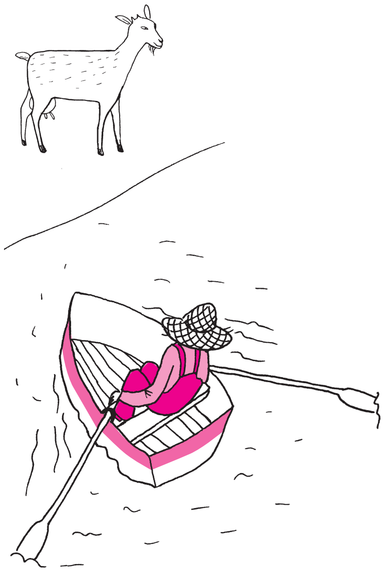


Liczby pierwsze jako niewiadome

Mariusz SKAŁBA

W historii ludzkiego poznania mało jest tak fascynujących pojęć jak liczby pierwsze. Chociaż dzisiaj wiemy o nich znacznie więcej niż 120 lat temu, to jeszcze więcej dotyczących ich pytań pozostaje bez odpowiedzi. Celem tej notki jest pokazanie, że trudno jest ocenić na pierwszy rzut oka, czy pytanie dotyczące liczb pierwszych jest łatwe, czy też bardzo trudne – poza zasięgiem współczesnej nauki. Rozważmy najpierw następujące równanie z dwiema niewiadomymi:

$$p^2 - 2q^2 = 1. \tag{1}$$

Szukamy rozwiązań w liczbach pierwszych p, q. Jeśli $q = 2$, to $p = 3$. Jeżeli natomiast $q > 2$, to obie p, q są nieparzyste, a więc

$$p^2 \equiv q^2 \equiv 1 \pmod 4.$$

Wynika stąd, że

$$1 = p^2 - 2q^2 \equiv 1 - 2 \equiv 3 \pmod 4,$$

co jest absurdem. Jedynym rozwiązaniem równania (1) w liczbach pierwszych p, q jest zatem para $p = 3, q = 2$.

Zajmiemy się teraz podobnym równaniem:

$$p^2 - 2q^2 = -1. \tag{2}$$

Można zgadnąć, że para $(7, 5)$ jest rozwiązaniem (2) w liczbach pierwszych. W przypadku jeszcze większej determinacji natrafimy na rozwiązanie $(41, 29)$ (proszę sprawdzić!) ale co robić dalej! Już teraz widać, że ewentualny dowód (ewentualnego) „twierdzenia”, iż równanie (2) ma tylko skończenie wiele rozwiązań w liczbach pierwszych p, q, nie może być całkiem banalny, gdyż musiałby on wychwycić znalezione rozwiązania. Podejdźmy więc do problemu bardziej systematycznie i bez żadnych uprzedzeń. Zauważmy przede wszystkim, że pary (a_n, b_n), określone wzorem

$$a_n + b_n\sqrt{2} := (1 + \sqrt{2})^n, \text{ gdzie } n = 1, 3, 5, 7, \ldots,$$

spełniają równanie (2), gdyż ze wzoru dwumianowego Newtona wynika, że

$$(1 - \sqrt{2})^n = a_n - b_n\sqrt{2},$$

a zatem

$$a_n^2 - 2b_n^2 = (a_n + b_n\sqrt{2})(a_n - b_n\sqrt{2}) = (1 + \sqrt{2})^n(1 - \sqrt{2})^n = (-1)^n = -1,$$

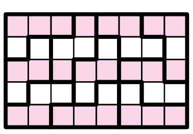
gdyż n jest nieparzyste. Łatwo sprawdzić, że zgadnięte wcześniej rozwiązania w liczbach pierwszych to (a_3, b_3) oraz (a_5, b_5). Z pomocą komputera sprawdziliśmy rozwiązania (a_n, b_n) dla wszystkich $n \leqslant 60$: tylko dla $n = 3, 5, 29, 59$ otrzymujemy obie liczby pierwsze.

n	a_n	b_n
1	1	1
3	7	5
5	41	29
29	63018038201	44560482149
59	19175002942688032928599	13558774610046711780701
?	?	?

Ale możemy zaryzykować hipotezę, że równanie (2) ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach pierwszych p, q. Raczej nie zachęcamy Cię, Czytelniku, abyś się nią zajmował, ale do studiowania matematyki teoretycznej jak najbardziej :)

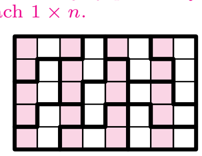
Rozwiązanie zadania M 1532.
Jeżeli prostokąt $m \times n$ został ułożony z pewnej liczby opisanych płytek, to jego powierzchnia jest liczbą podzielną przez 4, wobec czego co najmniej jeden z wymiarów jest liczbą podzielną przez 2. Przypuśćmy bez straty ogólności, że $m = 2k$.

Sposób 1. Pomalujmy prostokąt w paski o wymiarach $2k \times 1$.



Zauważmy, że każda kostka typu S zawiera parzystą liczbę kolorowych pól (dokładnie dwa), a każda kostka typu L zawiera nieparzystą liczbę kolorowych pól (jedno lub trzy). Ponieważ liczba kolorowych pól w całym prostokącie jest parzysta (jako wielokrotność liczby $2k$), więc łączna liczba kostek zawierających nieparzystą liczbę kolorowych pól musi być parzysta.

Sposób 2. Pomalujmy prostokąt w paski o wymiarach $1 \times n$.



Zauważmy, że pól każdego koloru jest po tyle samo zarówno w całej tablicy (po kn), jak i w obrębie dowolnej płytki typu S. Tymczasem każda z płytek typu L jest zdominowana przez pewien kolor (w stosunku pól $3:1$). Wobec tego liczba płytek zdominowanych przez kolor biały musi być równa liczbie płytek zdominowanych przez kolor, a zatem łączna liczba płytek typu L jest parzysta.