Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VIII 2017

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 729 ($WT = 2{,}34$) i 730 ($WT = 1{,}87$) z numeru 11/2016

Marek Spychała	Warszawa	45,09
Zbigniew Skalik	Wrocław	44,50
Witold Bednarek	Łódź	44,19
Roksana Słowik	Knurów	38,41
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	38,08
Patryk Jaśniewski	Gdańsk	35,99
Adam Dzedzej	Gdańsk	35,68

No i odnotowujemy trzy jednoczesne przejścia magicznej linii 44 p. Z tej trójki nikt nie jest nowicjuszem: **Marek Spychała** – po raz drugi; **Zbigniew Skalik** – po raz trzeci – mamy więc kolejnego Weterana; wszelako tytuł ten, choć nobliwy, blednie, gdy spojrzymy na staż samego *uczestnictwa* w Lidze: **Witold Bednarek**, obecny w Lidze od roku 1981(!) właśnie zamyka siódme okrążenie.

Zadania z matematyki nr 743, 744

Redaguje Marcin E. KUCZMA

743. W zbiorze liczb rzeczywistych różnych od zera określamy działanie: $x\diamondsuit y = (x/y) + (y/x)$. Niech a, b, c, d będą liczbami, spełniającymi równanie

$$(a\diamondsuit b) + (b\diamondsuit c) + (c\diamondsuit d) + (d\diamondsuit a) = (a\diamondsuit c) + (b\diamondsuit d) + ((ac)\diamondsuit(bd)) + 2.$$

Czy a, b, c, d mogą być czterema różnymi liczbami? Czy mogą być wśród nich trzy różne liczby?

744. Dana jest liczba całkowita $k \geqslant 2$. Niech M będzie takim zbiorem dodatnich liczb całkowitych, że dla każdej pary różnych liczb $m, n \in M$ zachodzi nierówność $mn \leqslant k^2|m-n|$. Wykazać, że zbiorze M jest nie więcej niż $2k-1$ liczb. Czy dla każdej liczby $k \geqslant 2$ istnieje $(2k-1)$-elementowy zbiór M o podanej własności?

Zadanie 744 zostało opracowane na podstawie propozycji, którą przysłał pan Paweł Kubit z Krakowa.

Rozwiązania zadań z numeru 2/2017

Przypominamy treść zadań:

735. Dana jest liczba dodatnia $a < 1$. Obliczyć kres górny zbioru wartości wyrażenia $a^{\operatorname{tg}\alpha} + a^{\operatorname{ctg}\alpha}$, gdy zmienna α przebiega przedział $(0, \pi/2)$.

736. Rozważamy słowa binarne (ciągi zerojedynkowe) długości n. Niech A_n będzie liczbą takich słów, w których nie pojawia się blok 010, zaś B_n liczbą takich słów, w których w żadnym miejscu blok 00 nie sąsiaduje z blokiem 11. Dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 3$ wyznaczyć wartość stosunku A_n/B_{n+1}.

735. Gdy α przebiega przedział $(0, \pi/2)$, wartość $\operatorname{tg}\alpha$ przebiega zbiór wszystkich liczb dodatnich. Należy więc znaleźć kres górny funkcji $f(x) = a^x + a^{1/x}$ zmiennej $x \in (0, \infty)$. Ponieważ $f(x) = f(1/x)$, kres górny na przedziale $(0,\infty)$ jest taki sam, jak na przedziale $[1,\infty)$. Pochodna funkcji f ma po prostym przekształceniu postać

$$f'(x) = \bigl(-a^x \ln a\bigr)\bigl(x^{-2}a^{\varphi(x)} - 1\bigr), \qquad \text{gdzie} \quad \varphi(x) = \frac{1}{x} - x.$$

Skoro $a < 1$, czynnik w pierwszym nawiasie jest stale dodatni. Czynnik w drugim nawiasie ma taki sam znak jak wyrażenie

$$g(x) = \ln\bigl(x^{-2}a^{\varphi(x)}\bigr) = -2\ln x + \bigl(\ln a\bigr)\Bigl(\frac{1}{x} - x\Bigr).$$

Teraz badamy funkcję g w przedziale $[1,\infty)$. Jej pochodna:

$$g'(x) = \bigl(-x^{-2}\ln a\bigr)\Bigl(x^2 + \frac{2}{\ln a}\cdot x + 1\Bigr).$$

I znów, czynnik w pierwszym nawiasie jest dodatni. W drugim nawiasie widzimy trójmian kwadratowy, którego pierwiastki (rzeczywiste lub nie) mają iloczyn równy 1; w przedziale $(1,\infty)$ może być co najwyżej jeden pierwiastek. Dla dużych x trójmian ma wartości dodatnie. Zatem wartości $g'(x)$ albo są dodatnie w całym przedziale $(1,\infty)$, albo są – przedziałami – najpierw ujemne, potem dodatnie. Funkcja g jest więc albo rosnąca, albo (kolejno) malejąca–rosnąca. A ponieważ $g(1) = 0$ oraz $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$, wynika stąd, że także wartości $g(x)$ są albo stale dodatnie, albo (przedziałami, od lewej) ujemne–dodatnie.

Funkcja g ma taki znak, jak f', wobec czego możemy powtórzyć rozumowanie: funkcja f jest albo rosnąca, albo (kolejno) malejąca–rosnąca. W każdym przypadku jej kresem górnym na przedziale $[1,\infty)$ jest jej wartość lub granica w jednym z końców przedziału. Otrzymujemy wynik:

$$\sup_{x\in(0,\infty)} f(x) = \sup_{x\in[1,\infty)} f(x) = \max\{f(1), \lim_{x\to\infty} f(x)\} = \max\{2a, 1\}.$$

736. Słowu $X = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ długości $n+1$ przyporządkujmy słowo $Y = (y_1, \ldots, y_n)$ długości n, przyjmując $y_i = |x_i - x_{i-1}|$. Znając słowo Y oraz element x_0, jednoznacznie odtwarzamy słowo X.

Obecność bloku 010 w słowie Y oznacza obecność bloku 0011 lub 1100 w słowie X, i na odwrót. Liczba słów X bez bloków 0011, 1100, z elementem początkowym $x_0 = 0$, jest taka sama, jak tych z elementem początkowym $x_0 = 1$; i jest, w myśl poprzedniego spostrzeżenia, taka sama, jak liczba słów Y bez bloku 010. Stąd wniosek, że $B_{n+1} = 2A_n$.

Zadania z fizyki nr 640, 641

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VIII 2017

640. Do wahadła matematycznego AB (rys. 1) o masie M przyczepione jest wahadło matematyczne BC o masie m. Punkt zawieszenia A tego wahadła podwójnego drga harmonicznie wzdłuż linii poziomej z częstością ω i małą amplitudą. Znaleźć długość nici dolnego wahadła, jeżeli górna nić przez cały czas pozostaje pionowa.

641. Gumowy kabel ma współczynnik sprężystości k, masę m i długość l. Okrąg zrobiony z tego kabla obraca się z prędkością kątową ω w płaszczyźnie poziomej wokół osi pionowej, przechodzącej przez środek okręgu. Wyznaczyć promień obracającego się pierścienia.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
626 ($WT = 1{,}98$), 627 ($WT = 3{,}18$)
628 ($WT = 3{,}55$), 629 ($WT = 3{,}18$)
z numerów 11/2016 i 12/2016

Michał Koźlik	Poznań	42,91
Tomasz Wietecha	Tarnów	38,37
Marian Łupieżowiec	Gliwice	38,33
Tomasz Rudny	Gliwice	37,68
Jan Zambrzycki	Białystok	32,58
Andrzej Idzik	Bolesławiec	32,22
Jacek Konieczny	Poznań	29,51
Ryszard Woźniak	Kraków	28,77

Rozwiązania zadań z numeru 2/2017

Przypominamy treść zadań:

632. Dielektryczna kula o promieniu b naładowana jest ze stałą gęstością objętościową $\rho > 0$. Wewnątrz kuli znajduje się uziemiona, metalowa sfera o promieniu a (rys. 2). Znaleźć ładunek indukowany na tej sferze.

633. Cienka soczewka rozpraszająca o ogniskowej f i zwierciadło sferyczne wklęsłe mają wspólną oś optyczną (rys. 3). Środek zwierciadła znajduje się w jednym z ognisk soczewki. Układ daje rzeczywisty obraz przedmiotu S umieszczonego w dowolnej odległości na prawo od soczewki. Znaleźć ogniskową zwierciadła.

632. Pole elektrostatyczne układu jest złożeniem pola od kuli dielektrycznej i pola od uziemionej sfery.

Oznaczmy natężenie pola od kuli przez $E_1(r)$, gdzie r jest odległością od środka kuli. Dla $r > b$ mamy zgodnie z prawem Gaussa $4\pi\varepsilon_0 r^2 E_1(r) = 4\pi b^3\rho/3$, czyli pole $E_1(r) = b^3\rho/(3\varepsilon_0 r^2)$ jest takie, jak od ładunku punktowego równego ładunkowi kuli i umieszczonego w środku kuli. Potencjał od kuli w rozważanym obszarze jest również taki, jak od ładunku punktowego i wynosi $V_1(r) = b^3\rho/(3\varepsilon_0 r)$. Dla $0 \leqslant r \leqslant b$ mamy $E_1(r) = \rho r/(3\varepsilon_0)$. Aby otrzymać potencjał w tym obszarze, do potencjału $V_1(b) = \rho b^2/(3\varepsilon_0)$ musimy dodać pracę pola elektrycznego przy przenoszeniu jednostkowego ładunku z punktu oddalonego o r od środka kuli do punktu na powierzchni kuli:

$$V_1(r) = V_1(b) + (E_1(r) + E_1(b))\frac{b-r}{2} = \rho\frac{3b^2 - r^2}{6\varepsilon_0}.$$

Pole od uziemionej sfery dla $r > a$ dane jest wzorem $E_2(r) = Q/(4\pi\varepsilon_0 r^2)$, gdzie Q jest ładunkiem indukowanym na sferze. Potencjał w tym obszarze jest równy $V_2(r) = Q/(4\pi\rho_0 r)$. Wypadkowy potencjał uziemionej sfery to

$$V(a) = V_1(a) + V_2(a) = 0,$$

stąd szukany ładunek indukowany wynosi

$$Q = -2\pi\rho a\frac{3b^2 - a^2}{3}.$$

633. Niech x_1 oznacza odległość przedmiotu S od soczewki. Zgodnie ze wzorem soczewkowym odległość obrazu od soczewki dana jest wzorem $y_1 = fx_1/(x_1 - f)$ (rys. 4) i dla przedmiotu rzeczywistego, gdy $0 \leqslant x_1 \leqslant \infty$, spełnia warunki

$$f \leqslant y_1 \leqslant 0. \tag{1}$$

Soczewka rozpraszająca daje zawsze obraz pozorny przedmiotu rzeczywistego. Obraz ten jest przedmiotem rzeczywistym dla zwierciadła, odległym od niego o $x_2 = -f - y_1$. Zgodnie z (1)

$$-f \leqslant x_2 \leqslant -2f. \tag{2}$$

Obraz w zwierciadle musi być przedmiotem pozornym dla soczewki, zatem jego odległość od zwierciadła spełnia warunek $y_2 \geqslant -f$. Soczewka rozpraszająca daje rzeczywisty obraz przedmiotu pozornego, gdy odległość tego przedmiotu $x_3 = -(y_2 + f)$ spełnia warunek $fx_3/(x_3 - f) \geqslant 0$, czyli $x_3 \geqslant f$. Stąd $y_2 \leqslant -2f$. Zatem spełnione są warunki

$$\frac{-1}{2f} \leqslant \frac{1}{y_2} \leqslant \frac{-1}{f}.$$

Korzystając z równania zwierciadła

$$\frac{1}{y_2} = \frac{1}{f_1} - \frac{1}{x_2},$$

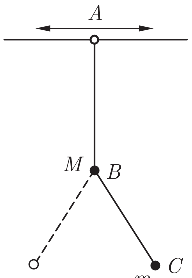
gdzie f_1 jest ogniskową zwierciadła, otrzymujemy następujące ograniczenia:

$$-\frac{1}{2f} + \frac{1}{x_2} \leqslant \frac{1}{f_1} \leqslant -\frac{1}{f} + \frac{1}{x_2},$$

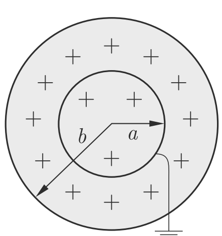
a biorąc pod uwagę warunek (2), dostajemy

$$-\frac{1}{2f} - \frac{1}{f} \leqslant \frac{1}{f_1} \leqslant -\frac{1}{f} - \frac{1}{2f}.$$

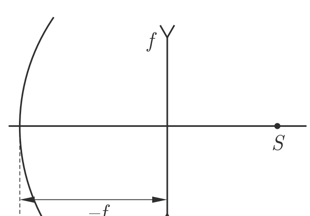
Ostatecznie szukana ogniskowa zwierciadła jest równa $f_1 = -2f/3$.



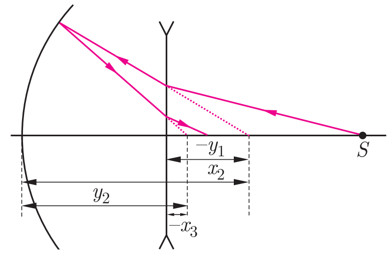
Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4